

# Pengantar Persamaan Diferensial

**Heri Purnawan**

Universitas Islam Lamongan (UNISLA)

Disampaikan pada Matakuliah Matematika Teknik II (4 sks)  
Program Studi Teknik Elektro

February 18, 2025

# Perkenalan Singkat

- ◀ Nama Lengkap: Heri Purnawan
- ◀ Program Studi: Teknik Elektro, Universitas Islam Lamongan (UNISLA)
- ◀ Riwayat Pendidikan:
  - S-1 Matematika ITS (2011 - 2015)
  - S-2 Matematika ITS (2016 - 2018)
  - S-3 Matematika ITS (2020 - 2024)
- ◀ Informasi:
  - Phone: +62 82140797329
  - Email: heripurnawan@unisla.ac.id
  - Ruang: Gedung C, Lt. 1, Kampus 1, UNISLA.

## Penilaian:

- ◀ Kehadiran : 15%
- ◀ Tugas : 20%
- ◀ Quiz 1 : 10%
- ◀ Quiz 2 : 10%
- ◀ ETS : 20%
- ◀ EAS : 25%

Materi pembelajaran dan referensi lihat di RPS  
(<https://heri-purnawan.github.io/teaching/te4485/>)

# Aturan perkuliahan

## **Penting!**

Toleransi keterlambatan maksimal 15 menit yaitu 08:15 WIB (berlaku untuk mahasiswa dan dosen)

- ◀ Jika mahasiswa terlambat lebih dari 15 menit, maka dianggap tidak hadir di kelas (kecuali ada alasan tertentu yang dianggap logis).
- ◀ Jika dosen terlambat lebih dari 15 menit (tanpa pemberitahuan yang merugikan waktu mahasiswa), maka mahasiswa berhak melaporkan ke KaProdi/WaDek I/WaRek I untuk dikenai sanksi.

# Pendahuluan

## Definisi Persamaan Diferensial (PD)

Suatu persamaan yang mengandung fungsi beserta turunan-turunannya.

## Tingkat PD

Suatu persamaan yang mana turunan tertinggi merupakan tingkat persamaan diferensial.

## Derajat PD

Pangkat dari turunan tertinggi.

## Penyelesaian PD

Fungsi yang memenuhi persamaan diferensial.

◀ Penyelesaian PD tidak tunggal.

Contoh:

$$\mathbf{1} \quad \left. \begin{array}{l} y = C_2 e^{-t} \\ y' = -C_2 e^{-t} \\ y'' = C_2 e^{-t} \end{array} \right\} \frac{d^2 y}{dt^2} - y = 0$$

$$\mathbf{2} \quad \left. \begin{array}{l} y = C_1 e^t + C_2 e^{-t} \\ y' = C_1 e^t - C_2 e^{-t} \\ y'' = C_1 e^t + C_2 e^{-t} \end{array} \right\} \frac{d^2 y}{dt^2} - y = 0$$

$$\mathbf{3} \quad y = C \sin t \rightarrow \text{bukan penyelesaian } \frac{d^2 y}{dt^2} - y = 0$$

◀ Banyaknya konstanta sebarang tergantung pada tingkat PD.

◀ **Penyelesaian Umum:** Penyelesaian PD yang memuat konstanta sebarang

**Penyelesaian Khusus:** Tidak ada konstanta sebarang.

## Klasifikasi PD

- ◀ Salah satu klasifikasi penting didasarkan pada apakah fungsi yang tidak diketahui bergantung pada satu variabel bebas atau beberapa variabel bebas.
  - **Persamaan diferensial biasa** (*Ordinary Differential Equation*, ODE) adalah persamaan yang melibatkan turunan dari suatu fungsi terhadap satu variabel bebas.
  - **Persamaan diferensial parsial** (*Partial Differential Equation*, PDE) adalah persamaan yang melibatkan turunan parsial dari suatu fungsi dengan lebih dari satu variabel bebas.
- ◀ Klasifikasi penting dari persamaan diferensial adalah apakah persamaan tersebut linier atau nonlinier.
  - **Linear**, jika setiap suku dalam persamaan tidak mengandung atau hanya mengandung tepat satu dari variabel terikat atau turunannya. Tidak ada perkalian variabel terikat dengan dirinya sendiri atau dengan turunannya.
  - **Nonlinier**, jika bukan linier.

## Contoh-Contoh Klasifikasi PDB/PDP

- ▶ **Peluruhan Radioaktif:** Jumlah  $u$  dari suatu material radioaktif berubah seiring waktu sebagai berikut,

$$\frac{du(t)}{dt} = -ku(t), \quad k > 0$$

dimana  $k$  adalah konstanta positif yang mewakili sifat radioaktif material tersebut.

**Jawab:** PDB/ODE, Linier, Tk. 1, Derajat 1

- ▶ **Hukum Newton:** Massa dikalikan percepatan sama dengan gaya,  $ma = f$ , di mana  $m$  adalah massa partikel,  $a = \frac{d^2x}{dt^2}$  adalah percepatan partikel,  $x$  adalah posisi partikel pada waktu  $t$ , dan  $f$  adalah gaya yang bekerja pada partikel.

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = f \left( t, x(t), \frac{dx(t)}{dt} \right)$$

**Jawab:** PDB/ODE, Linier jika  $f$  linier, Tk. 2, Derajat 1

- ▶ **Persamaan Panas:** Suhu  $T$  dalam suatu material padat berubah seiring waktu dan dalam tiga dimensi- $\mathbf{x} = (x, y, z)$

$$\frac{\partial T(t, \mathbf{x})}{\partial t} = -k \left( \frac{\partial^2 T(t, \mathbf{x})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(t, \mathbf{x})}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T(t, \mathbf{x})}{\partial z^2} \right), \quad k > 0$$

dimana  $k$  adalah konstanta positif yang mewakili sifat termal dari material.

**Jawab:** PDP/PDE, Linier, Tk. 2 untuk ruang dan Tk. 1 untuk waktu, Derajat 1 untuk ruang dan waktu.

- ▶ **Persamaan Gelombang:** Sebuah gangguan gelombang  $u$  merambat dalam waktu  $t$  dan dalam tiga dimensi dilabeli dengan  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  melalui media dengan cepat rambat gelombang  $v > 0$  adalah

$$\frac{\partial^2 u(t, \mathbf{x})}{\partial t^2} = v^2 \left( \frac{\partial^2 u(t, \mathbf{x})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(t, \mathbf{x})}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(t, \mathbf{x})}{\partial z^2} \right),$$

**Jawab:** PDP/PDE, Linier, Tk. 2 untuk ruang dan waktu, Derajat 1 untuk ruang dan waktu.

## Soal Latihan

Dalam setiap Soal 1 sampai 5 tentukan apakah persamaan yang diberikan PDB atau PDP, linier atau nonlinier, Tingkat PD, dan Derajat PD.

1  $t^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + t \frac{dy}{dt} + 2y = \sin t$

2  $\frac{d^4 y}{dt^4} + \frac{d^3 y}{dt^3} + \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + y = 1$

3  $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$

4  $\frac{d^2 y}{dt^2} + \sin(t + y) = \sin t$

5  $u_{xx} + u_{yy} + uu_x + uu_y + u = 0$

# Aplikasi PD

## ◀ Fisika dan Teknik

- Mekanika: Model gerakan partikel dan sistem dinamis (misalnya, gerak osilasi pada pegas dan bandul).
- Elektronika: Analisis rangkaian listrik seperti RLC, LC, dan RC yang menggambarkan perilaku arus dan tegangan dalam sistem elektronik.
- Termodinamika: Pemodelan perpindahan panas dan difusi.

## ◀ Biologi dan Ekologi

- Pertumbuhan Populasi: Model pertumbuhan populasi (seperti model eksponensial dan logistik) dan interaksi predator-mangsa.
- Penyebaran Penyakit: Pemodelan penyebaran infeksi dan epidemiologi (misalnya, model SIR untuk penyakit menular).

# Aplikasi PD (lanj.)

## ◀ Kimia

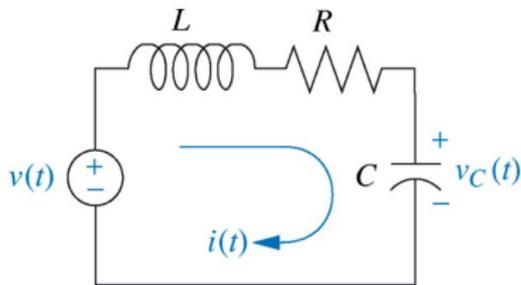
- Kinetika Reaksi: Persamaan diferensial digunakan untuk menggambarkan laju reaksi kimia dan perubahan konsentrasi zat selama waktu.
- Difusi: Model penyebaran zat dalam medium melalui persamaan difusi.

## ◀ Ekonomi dan Keuangan

- Model Pertumbuhan Ekonomi: Analisis dinamika ekonomi dan investasi menggunakan persamaan diferensial.
- Model Keuangan: Pemodelan pergerakan harga saham dan opsi melalui persamaan diferensial stokastik (seperti model *Black-Scholes*).

## ◀ Dll.

## PD dalam rangkaian listrik



dimana,  $R$  menyatakan resistor,  $L$  adalah induktor/kumparan,  $C$  adalah kapasitor,  $i$  adalah arus,  $v$  adalah tegangan, dan  $v_C$  adalah tegangan pada kapasitor. Dari Hukum Kirchhoff:

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt = v(t)$$

## PD dalam rangkaian listrik (lanj.)

Dengan menggunakan  $i(t) = \frac{dq}{dt}$ , dimana  $q$  adalah muatan listrik pada kapasitor, kita dapat dapatkan

$$L \frac{d^2 q(t)}{dt^2} + R \frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{C} q(t) = v(t)$$

Dengan hubungan  $q(t) = C v_C(t)$ , maka

$$LC \frac{d^2 v_C(t)}{dt^2} + RC \frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t) = v(t)$$

Pertemuan selanjutnya akan dibahas bagaimana mendapatkan solusi dari PDB orde 1 dan orde 2.



**YOU CAN  
IF  
YOU THINK YOU CAN**

