Sistem Persamaan Diferensial Biasa (Bagian 2)

Ordinary Differential Equation Systems (Part 2)

Heri Purnawan
Disampaikan pada Mata Kuliah Matematika Teknik II (TE4485)

Program Studi S-1 Teknik Elektro
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Lamongan

2025

Solusi Sistem PDB Homogen

Sistem PDB homogen atau sistem homogen dapat dipresentasikan sebagai:

$$\bar{x}'(t) = \bar{A}\bar{x} \tag{1}$$

Asumsikan solusi berbentuk:

$$\bar{x} = \bar{v}e^{\lambda t} \tag{2}$$

dimana: λ adalah skalar (selanjutnya disebut nilai eigen) dan $\bar{v}$ adalah vektor (selanjutnya disebut vektor eigen).

Jika Pers. (2) disubstitusi ke Pers. (1), maka

$$\lambda\bar{v}e^{\lambda t} = \bar{A}\bar{v}e^{\lambda t}.$$

Karena $e^{\lambda t} \neq 0$, maka diperoleh:

$$\bar{A}\bar{v} = \lambda\bar{v} \qquad \text{atau} \qquad (\bar{A} - \lambda I)\bar{v} = \bar{0} \tag{3}$$

dengan I adalah matriks identitas.

Solusi Sistem PDB Homogen (lanj.)

Dalam Aljabar Linier agar Pers. (3) memiliki solusi non-trivial, maka $(\bar{A} - \lambda I)$ harus singular. Syarat singular adalah determinannya adalah 0 (nol), sehingga:

$$|\bar{A} - \lambda I| = 0 \tag{4}$$

Pers. (4) adalah persamaan/polinomial karakteristik dari matriks $\bar{A}$

- Jika matriks $\bar{A}$ berukuran $n \times n$, maka polinomial karakteristiknya berderajat n.
- λ disebut nilai eigen dari matriks $\bar{A}$.

Untuk setiap λ temukan vektor $\bar{v}$ dengan menyelesaikan $(\bar{A} - \lambda I)\bar{v} = \bar{0}$ dimana $\bar{v}$ disebut vektor eigen dari setiap nilai eigen λ.

Ada beberapa kasus yang mungkin berkaitan dengan λ (dalam matriks $\bar{A}_{2\times 2}$):

(i) λ_1 & λ_2 real dan berbeda

(ii) λ_1 & λ_2 konjuget kompleks

(iii) λ_1 & λ_2 kembar

(i) λ_1 & λ_2 real & berbeda

Solusi umum dari $\bar{x}' = \bar{A}\bar{x}$ adalah

$$\bar{x}_{\text{gen}}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\bar{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\bar{v}_2$$

Contoh 1: Ubah persamaan diferensial tingkat 2 berikut ke dalam sistem PDB homogen: $\bar{x}' = \bar{A}\bar{x}$,

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

selanjutnya selesaikan sistem tersebut!

Jawab: Misalkan

$$\begin{aligned} x_1 = y \quad &\rightarrow \quad x_1' = y' = x_2 \\ x_2 = y' \quad &\rightarrow \quad x_2' = y'' = 5y' - 6y = 5x_2 - 6x_1 \end{aligned}$$

atau diubah dalam bentuk matriks $\bar{x}' = \bar{A}\bar{x}$, maka diperoleh:

$$\bar{x}' = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{bmatrix}}_{\bar{A}} \bar{x}$$

Dicari nilai eigen dari matriks $\bar{A}$:

$$|\bar{A} - \lambda I| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -6 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

sehingga diperoleh

$$(-\lambda)(5-\lambda) - 1(-6) = 0$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \quad \rightarrow \quad (\lambda - 3)(\lambda - 2) = 0$$

$$\lambda_1 = 3 \quad \text{atau} \quad \lambda_2 = 2$$

Mencari vektor eigen dari nilai eigen:

- $\lambda_1 = 3 \rightarrow (\bar{A} - \lambda I)\bar{v} = \bar{0}$

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{dituliskan dalam matriks diperbesar}} \left[\begin{array}{cc|c} -3 & 1 & 0 \\ -6 & 2 & 0 \end{array} \right]$$

OBE:

$$\left[\begin{array}{cc|c} -3 & 1 & 0 \\ -6 & 2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{B_2 \rightarrow B_2 - 2B_1} \left[\begin{array}{cc|c} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \begin{array}{rl} -3v_1 + v_2 & = 0 \\ 3v_1 & = v_2 \\ \text{misal: } v_1 = 1 & \rightarrow v_2 = 3 \end{array} \rightarrow \bar{v}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

- $\lambda_2 = 2 \to (\bar{A} - \lambda I)\bar{v} = \bar{0}$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{dituliskan dalam matriks diperbesar}} \left[\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 0 \\ -6 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

OBE:

$$\left[\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 0 \\ -6 & 3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{B_2 \to B_2 - 2B_1} \left[\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \begin{array}{rrl} & -2v_1 + v_2 & = 0 \\ & 2v_1 & = v_2 \\ \text{misal:} & v_1 = 1 & \to v_2 = 2 \end{array} \to \bar{v}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Jadi, solusi umum dari sistem tersebut adalah

$$\bar{x}(t) = c_1 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

artinya:

$$x_1 = y = c_1 e^{3t} + c_2 e^{2t} \quad \text{dan} \quad x_2 = y' = 3c_1 e^{3t} + 2c_2 e^{2t}$$

Catatan: Untuk perbandingan hasil, selesaikan dengan PDB tk. 2 homogen.

(ii) λ_1 & λ_2 konjuget kompleks

Jika $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ adalah eigen-eigen dari matriks $\bar{A}_{2\times 2}$ dengan eigen vektor $\bar{v}_{1,2} = \bar{a} \pm i\bar{b}$, dengan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ dan $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{R}^2$, maka solusi real untuk $\bar{x}' = \bar{A}\bar{x}$ adalah

$$\left.\begin{aligned} \bar{x}^{(1)}(t) &= (\bar{a}\cos\beta t - \bar{b}\sin\beta t)e^{\alpha t} \\ \bar{x}^{(2)}(t) &= (\bar{a}\sin\beta t + \bar{b}\cos\beta t)e^{\alpha t} \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{solusi umum}} \quad \bar{x}_{\text{gen}}(t) = c_1\bar{x}^{(1)}(t) + c_2\bar{x}^{(2)}(t)$$

Contoh 2: Tentukan solusi sistem homogen $\bar{x}' = \bar{A}\bar{x}$ dengan

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Jawab: Dicari nilai eigen dari matriks $\bar{A}$:

$$|\bar{A} - \lambda I| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ -3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad (2-\lambda)^2 - 3(-3) = 0$$

sehingga diperoleh

$$\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0 \quad \xrightarrow{\text{diperoleh}} \quad \lambda_{1,2} = 2 \pm 3i$$

Mencari vektor eigen dari nilai eigen:

- $\lambda_1 = 2+3i \rightarrow (\bar{A}-\lambda I)\bar{v} = \bar{0}$

$$\begin{bmatrix} 2-(2+3i) & 3 \\ -3 & 2-(2+3i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{dituliskan dalam matriks diperbesar}} \left[\begin{array}{cc|c} -3i & 3 & 0 \\ -3 & -3i & 0 \end{array}\right]$$

OBE:

$$\left[\begin{array}{cc|c} -3i & 3 & 0 \\ -3 & -3i & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[①]{B_2\to B_2\times\frac{1}{3}} \left[\begin{array}{cc|c} -i & 1 & 0 \\ -3 & -3i & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[②]{B_2\to B_2\times\frac{1}{3}} \left[\begin{array}{cc|c} -i & 1 & 0 \\ -1 & -i & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[③]{B_1\to B_1\times i}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & i & 0 \\ -1 & -i & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[④]{B_2\to B_2+B_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{aligned} v_1+iv_2 &= 0 \\ v_1 &= -iv_2 \\ \text{misal: } \quad v_2 = 1 &\rightarrow v_1 = -i \end{aligned} \xrightarrow{\text{diperoleh}} \bar{v}^{(1)} = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Untuk $\lambda_2 = 2 - 3i$ dengan cara yang sama, maka diperoleh

$$\bar{v}^{(2)} = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$$

Oleh karena itu,

$$\bar{v}_{1,2} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\bar{a}} \pm i \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\bar{b}}$$

Jadi, solusi umum dari sistem tersebut adalah

$$\bar{x}^{(1)}(t) = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cos 3t - \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \sin 3t \right) e^{2t}$$

dan

$$\bar{x}^{(2)}(t) = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \sin 3t + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \cos 3t \right) e^{2t}$$

(iii) λ_1 & λ_2 kembar

Jika matriks $\bar{A}_{2\times 2}$ memiliki nilai eigen yang sama, katakan λ dengan hanya 1 (satu) vektor eigen $\bar{v}$, maka sistem $\bar{x} = \bar{A}\bar{x}$ mempunyai solusi

$$\bar{x}^{(1)}(t) = e^{\lambda t}\bar{v} \quad \text{dan} \quad \bar{x}^{(2)}(t) = e^{\lambda t}(\bar{v}t + \bar{\omega}) \quad \xrightarrow{\text{solusi umum}} \quad \bar{x}_{\text{gen}}(t) = c_1\bar{x}^{(1)}(t) + c_2\bar{x}^{(2)}(t)$$

dimana vektor $\bar{\omega}$ adalah salah satu dari banyak solusi dari sistem berikut:

$$(\bar{A} - \lambda I)\bar{\omega} = \bar{v}$$

Contoh 3: Tentukan solusi dari sistem $\bar{x}' = \bar{A}\bar{x}$ dengan

$$\bar{A} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -6 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Jawab: Dicari nilai eigen dari matriks $\bar{A}$

$$|\bar{A} - \lambda I| = 0$$

$$\left| \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -6 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{vmatrix} -\frac{6}{4} - \lambda & 1 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{2}{4} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} \lambda^2 + 2\lambda + 1 &= 0 \\ (\lambda + 1)^2 &= 0 \\ \lambda_{1,2} &= -1 \end{aligned}$$

Dicari vektor eigen untuk $\lambda = -1$, dimana $(\bar{A} - \lambda I)\bar{v} = \bar{0}$:

$$\begin{bmatrix} -\frac{6}{4}+1 & 1 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{2}{4}+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \to \quad \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{matriks diperbesar}} \left[\begin{array}{cc|c} -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right]$$

OBE:

$$\left[\begin{array}{cc|c} -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{B_2 \to B_2 - \frac{1}{2}B_1} \left[\begin{array}{cc|c} -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \begin{array}{rl} -\frac{1}{2}v_1 + v_2 & = 0 \\ v_2 & = \frac{1}{2}v_1 \\ \text{misal:} \quad v_1 = 2 & \to v_2 = 1 \end{array} \xrightarrow{\text{diperoleh}} \bar{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Mencari vektor $\bar{w}$ yang memenuhi $(\bar{A} - \lambda I)\bar{w} = \bar{v}$:

OBE:

$$\left[\begin{array}{cc|c} -\frac{1}{2} & 1 & 2 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{B_2 \to B_2 - \frac{1}{2}B_1} \left[\begin{array}{cc|c} -\frac{1}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \begin{array}{rl} -\frac{1}{2}\omega_1 + \omega_2 & = 2 \\ \text{misal:} \quad \omega_1 & = 2 \\ -1 + \omega_2 = 2 & \to \omega_2 = 3 \end{array} \xrightarrow{\text{diperoleh}} \bar{\omega} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Jadi,

$$\bar{x}^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} \quad \text{dan} \quad \bar{x}^{(2}(t) = e^{-t}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right)$$