# PDB Linier Tingkat 2 Tak-Homogen

*Non-Homogeneous 2nd Order Linear ODE*

**Heri Purnawan**
**Disampaikan pada Mata Kuliah Matematika Teknik II (TE4485)**

Program Studi S-1 Teknik Elektro
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Lamongan

2025

# Metode Koefisien Tak Tentu

## Bentuk umum PDB linier tk. 2 tak homogen

PDB linier tk. 2 tak homogen dengan koefisien konstan secara umum berbentuk:

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = f(t), \tag{1}$$

dengan $f(t) \neq 0$ dan $a_1$, $a_0$ adalah koefisien yang diberikan.

Jika $y_p$ adalah solusi partikular dari PDB linier tak homogen di atas dan $y_h$ adalah solusi PDB homogen: $y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$, maka solusi umum PDB tak homogen di atas adalah

$$y = y_h + y_p$$

**Metode Koefisien Tak Tentu**:

- Jika $f(t)$ polinomial, maka $y_p(t)$ juga polinomial.
- Jika $f(t) = Ke^{at}$, maka $y_p(t) = Ce^{at}$.
- Jika $f(t) = K_1 \cos bt + K_2 \sin bt$, maka $y_p(t) = C_1 \cos bt + C_2 \sin bt$.

Catatan: $C$, $C_1$, dan $C_2$ adalah koefisien yang harus dicari.

# Contoh PDB Linier Tk. 2 Tak Homogen (Koefisien Konstan)

**Contoh 2.2.1 $f(t)$ polinomial**

Tentukan solusi umum dari

1. $y'' - 5y' + 6y = t$
2. $y'' - 4y' = t$

Jawab:

1. Solusi homogennya adalah $y_h = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t}$.
   Solusi persamaan tak homogen dapat dilakukan sebagai berikut:
   $$y_p = At + B \qquad \rightarrow \qquad y_p' = A \qquad \text{dan} \qquad y_p'' = 0.$$
   Substitusi ke PD dari soal, maka didapatkan:
   $$6A\ t + (6B - 5A) = t$$
   Diperoleh: $A = \frac{1}{6}$ dan $B = \frac{5}{36}$, sehingga, $y_p = \frac{1}{6}t + \frac{5}{36}$. Jadi
   $$y = y_h + y_p = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} + \frac{1}{6}t + \frac{5}{36}$$
2. Gunakan $y_p = At^2 + Bt + C$. Mengapa polinomial kuadrat?

# Contoh PDB Linier Tk. 2 Tak Homogen (Lanj.)

**Contoh 2.2.2 $f(t)$ adalah fungsi eksponensial**

Tentukan solusi umum dari

$$y'' - 4y' + 4y = e^t$$

**Contoh 2.2.3 $f(t)$ adalah fungsi eksponensial (kasus khusus)**

Tentukan solusi umum dari

1. $y'' - 5y' + 6y = e^{2t}$
2. $y'' - 4y' + 4y = e^{2t}$

**Contoh 2.2.4 $f(t)$ adalah fungsi trigonometri**

Tentukan solusi umum dari

$$y'' - 4y' + 5y = \sin t$$

# PDB Linier Tk. 2 Tak Homogen (Latihan)

**Latihan 2.2.1**

Tentukan solusi umum dari

$$y'' - 4y' + 4y = e^{2t} + 1$$

**Latihan 2.2.2**

Tentukan solusi umum dari

$$y'' - 4y' + 4y = e^{2t} + t$$

# Metode Variasi Parameter

Sebelumnya kita telah membahas penyelesaian PDB linier tk. 2 tak homogen dengan metode koefisien tak tentu.

Untuk $f(t)$ sembarang, solusi partikular $y_p$ dapat diperoleh dengan metode variasi parameter. Jika $u_1(t)$ dan $u_2(t)$ adalah solusi yang saling bebas dari PDB homogen $y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$, maka solusi partikular PDB tak homogen $y'' + a_1 y' + a_0 y = f(t)$ berbentuk

$$y_p = c_1(t)u_1(t) + c_2(t)u_2(t),$$

dengan

$$\begin{aligned} c_1' u_1 + c_2' u_2 &= 0 \\ c_1' u_1 + c_2' u_2' &= f(t) \end{aligned}$$

atau dalam bentuk matriks dituliskan sebagai

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1' \\ c_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f(t) \end{bmatrix}$$

# PDB Tak Homogen dengan Variasi Paramater (Contoh)

**Contoh 2.2.5**

Tentukan solusi umum PDB: $y'' + y = \sec t$

Jawab: Solusi homogennya adalah

$$y_h = c_1 \cos t + c_2 \sin t$$

Selidiki!

Karena itu solusi partikularnya mestilah berbentuk

$$y_p = c_1(t) \cos t + c_2(t) \sin t$$

dengan

$$\begin{aligned} c_1' \cos t + c_2' \sin t &= 0 \\ c_1'(-\sin t) + c_2' \cos t &= \sec t \end{aligned}$$

atau dalam bentuk matriks:

$$\begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1' \\ c_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sec t \end{bmatrix}$$

# Lanjutan solusi Contoh 2.2.5

$$\begin{bmatrix} c_1' \\ c_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \sec t \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \sec t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\tan t \\ 1 \end{bmatrix}$$

Diperoleh: $c_1' = -\tan t$ dan $c_2' = 1$.
Jadi,

$$c_1 = \int -\tan t \quad dt = \ln|\cos t|$$

$$c_2 = \int 1 \quad dt = t$$

Abaikan konstanta sebarang pada bentuk integral, karena kita sedang mencari solusi partikular. Dengan demikian, solusi partikularnya adalah

$$y_p = (\ln|\cos t|)\cos t + t \sin t$$

dan karena itu, solusi umum PDB tak homogennya $y = y_h + y_p$ adalah

$$y = (\ln|\cos t| + c_1)\cos t + (t + c_2)\sin t$$

# PDB Tak Homogen dengan Variasi Paramater (Latihan)

**Latihan 2.2.3**

Tentukan solusi umum dari

$$y'' + y = \csc t \cot t$$