PDB Linier Tingkat 2 Homogen

Homogeneous 2^{nd} Order Linear ODE

Heri Purnawan
Disampaikan pada Mata Kuliah Matematika Teknik II (TE4485)

Program Studi S-1 Teknik Elektro
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Lamongan

2025

PDB Linier Tk. 2

Definisi 2.1.1

PDB linier Tk. 2 untuk fungsi $y(t)$ adalah

$$y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = f(t), \tag{1}$$

dimana a_1, a_0 adalah fungsi yang diberikan. Pers. (1) adalah

- Homogen, jika $f(t) = 0$ dan tak-homogen, jika $f(t) \neq 0$, untuk semua $t \in \mathbb{R}$.
- Koefisien konstan, jika a_1, a_0 konstan dan koefisien variabel, jika a_1, a_0 bukan konstan, untuk semua $t \in \mathbb{R}$.

Contoh 2.1.1

Klasifikan PDB linier Tk.2 berikut adalah koef. konstan, koef. variabel, homogen, atau tak-homogen!

1. $y'' + 5y' + 6 = 0$
2. $y'' - 3y' + y = \cos(3t)$

Solusi PDB Linier Tk. 2 Homogen Koefisien Konstan

Diberikan PDB linier Tk. 2 homogen koefisien konstan sebagai berikut:

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \tag{2}$$

Misalkan didefinisikan $y = e^{\lambda t}$, maka

$$y' = \lambda e^{\lambda t} \qquad y'' = \lambda^2 e^{\lambda t}$$

Substitusikan ke Pers. (2), maka diperoleh

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + a_1 \lambda e^{\lambda t} + a_0 e^{\lambda t} = 0 \quad \text{atau} \quad (\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0) e^{\lambda t} = 0$$

Karena $e^{\lambda t} \neq 0$, maka $\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$. Dalam hal ini persamaan/polinomial karakteristik adalah

$$P(\lambda) = \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 \tag{3}$$

Akar-akar Persamaan Karakteristik

Pers. (3) adalah polinomial derajat 2 atau persamaan kuadrat yang kemungkinan mempunyai akar-akar karakteristik sebagai berikut:

- 2 buah akar real dan berbeda (λ_1 dan $\lambda_2, \lambda_1 \neq \lambda_2$)
  PUPD:
  $$y_h = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t},$$
  y_h adalah penyelesaian homogen.
- 2 buah akar real dan kembar ($\lambda_1 = \lambda_2$)
  PUPD:
  $$y_h = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}, \lambda = \lambda_1 = \lambda_2$$
- 2 buah akar imajiner/*konjugate* kompleks ($\lambda_1 = a + ib$ dan $\lambda_2 = a - ib,$ dimana $a, b \in \mathbb{R}$)
  PUPD:
  $$y_h = c_1 e^{(a+ib)t} + c_2 e^{(a-ib)t}$$

Solusi PDB Linier Tk. 2 Homogen Koef. Konstan

Contoh 2.1.2 Akar real dan berbeda

Diberikan PDB linier tk. 2 homogen sebagai berikut

$$y'' - 7y' + 12y = 0$$

1. Tentukan persamaan karakteristiknya!
2. Tentukan akar-akar persamaan karakteristiknya!
3. Tentukan penyelesaian umum PD (PUPD)!

Contoh 2.1.3 Akar real dan kembar

Diberikan PDB linier tk. 2 homogen sebagai berikut

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

1. Tentukan persamaan karakteristiknya!
2. Tentukan akar-akar persamaan karakteristiknya!
3. Tentukan penyelesaian umum PD (PUPD)!

Review Singkat Bilangan Kompleks

- Bilangan kompleks mempunyai bentuk

$$z = a + ib, \text{ dimana } i = \sqrt{-1} \text{ dan } a, b \in \mathbb{R}$$

- $\text{Re}[z] = a$, $\text{Im}[z] = b$ adalah bagian real dan imajiner dari z.
- *Konjugate* dari z adalah $\bar{z} = a - ib$

$$\text{Re}[z] = \frac{z + \bar{z}}{2}, \text{Im}[z] = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

- Eksponensial dari bil. kompleks adalah

$$e^{a+ib} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+ib)^n}{n!}, \text{ khususnya berlaku } e^{a+ib} = e^a \cdot e^{ib}.$$

- Rumus Euler:

$$e^{ib} = \cos b + i \sin b$$

- Bil. kompleks dari bentuk $e^{a \pm ib}$ dapat dituliskan sebagai

$$e^{a+ib} = e^a(\cos b + i \sin b) \text{ dan } e^{a-ib} = e^a(\cos b - i \sin b)$$

Review Singkat Bilangan Kompleks (lanj.)

- Dari e^{a+ib} dan e^{a-ib}, maka diperoleh bil. real

$$\frac{1}{2}\left(e^{a+ib}+e^{a-ib}\right)=e^{a}\cos b$$
$$\frac{1}{2i}\left(e^{a+ib}+e^{a-ib}\right)=e^{a}\sin b$$

Recall: Solusi PDB linier tk. 2 homogen dengan akar-akar bilangan kompleks yaitu

$$y_h = c_1\ e^{(a+ib)t} + c_2\ e^{(a-ib)t} = c_1\ e^{at}\cdot e^{ibt} + c_2\ e^{at}\cdot e^{-ibt}$$

Dengan menggunakan rumus Euler:

$$\begin{aligned} y_h &= c_1 e^{at}\left(\cos bt + i\sin bt\right) + c_2 e^{at}\left(\cos bt - i\sin bt\right) \\ &= e^{at}\left(c_1(\cos bt + i\sin bt) + c_2(\cos bt - i\sin bt)\right) \\ &= e^{at}\left((c_1+c_2)\cos bt + i\,(c_1-c_2)\sin bt\right) \end{aligned}$$

Misalkan: $K_1 = c_1 + c_2$ dan $K_2 = i(c_1 - c_2)$, maka

$$y_h = e^{at}\left(K_1\cos bt + K_2\sin bt\right)$$

Solusi PDB Linier Tk. 2 Homogen Koef. Konstan (lanj.)

Contoh 2.1.4 Akar imajiner/*konjugate* kompleks

Diberikan PDB linier tk. 2 homogen sebagai berikut

$$y'' - 4y' + 5y = 0$$

1. Tentukan persamaan karakteristiknya!
2. Tentukan akar-akar persamaan karakteristiknya!
3. Tentukan penyelesaian umum PD (PUPD)!

Konsep PDB linier tk. 2 homogen koef. konstan ini juga dapat diperluas untuk menyelesaiakan PDB linier tk. n. Mari kita pahami penerapannya dalam menyelesaikan PDB linier tk. 3 dan 4 melalui contoh berikut.

Contoh 2.1.5 PDB linier tk. 3 & 4

Tentukan PUPD dari PDB linier berikut

1. $y''' - y'' - 20y' = 0$
2. $y^{(4)} - y = 0$