Persamaan Diferensial Biasa Tingkat 1 (Bagian 1)

1^{st} Order Ordinary Differential Equation (Part 1)

Heri Purnawan

Disampaikan pada Mata Kuliah Matematika Teknik II (TE4485)

Program Studi S-1 Teknik Elektro
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Lamongan

2025

Persamaan Diferensial Biasa Linier

Definisi 1.1.1

Persamaan Diferensial Biasa (PDB) tingkat 1 diberikan oleh

$$y'(t) = f(t, y(t)) \tag{1}$$

dimana fungsi f diberikan dan $y' = \frac{dy}{dt}$. Jika fungsi f pada Pers. (1) bergantung secara linier pada variabel terikat y, maka Pers. (1) disebut PDB linier tingkat 1.

Definisi 1.1.2

PDB linier tingkat 1 dapat didefiniskan sebagai

$$y' = a(t)y + b(t) \tag{2}$$

Persamaan linier mempunyai koefisien konstan jika a dan b di Pers. (2) adalah konstan. Jika tidak, persamaan tersebut memiliki koefisien variabel.

PDB Linier Tk. 1

Contoh 1.1.1

Diberikan PDB Tk. 1 sebagai berikut:

a. $y' = 2y + 3$ b. $y' = -\frac{2}{t}y + 4t$ c. $y' = -\frac{2}{ty} + 4t$

Klasifikasikan apakah PDB Tk. 1 tersebut merupakan PDB linier Tk. 1 atau bukan? Kemudian, jika merupakan PDB linier Tk. 1, tentukan nilai $a(t)$ dan $b(t)$!

Diberikan $y : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sebuah fungsi bernilai real didefinisikan pada sebuah domain D. Fungsi tersebut merupakan penyelesaian persamaan diferensial pada Pers. (1), jika persamaan tersebut terpenuhi untuk semua nilai variabel bebas t pada domain D.

Contoh 1.1.2

Tunjukkan bahwa $y(t) = e^{2t} - \frac{3}{2}$ adalah solusi dari persamaan

$$y' = 2y + 3$$

Contoh 1.1.3

Temukan PDB dengan bentuk $y' = f(y)$ dengan solusi $y(t) = 4e^{2t} + 3$.

Penyelesaian PDB Linier Tk. 1 (Koef. Konstan)

PDB linier Tk. 1 dengan koefisien konstan lebih mudah diselesaikan dibandingkan dengan persamaan koefisien variabel. Namun mengintegrasikan setiap sisi persamaan tidak akan berhasil.

Metode faktor pengintegral

Bentuk umum:

$$y'(t) = ay(t) + b$$

Kunci: Faktor pengintegral

$$v(t) = e^{-\int a \ dt}$$

Penyelesaian Umum (PU):

$$y(t)v(t) = \int bv(t) \ dt$$

Contoh 1.1.4

Tentukan solusi PDB linier Tk. 1 berikut:

a. $y' = 2y + 3$ b. $y' = 3y$

Masalah Nilai Awal PDB Linier Tk. 1 (Koef. Konstan)

Definisi 1.1.3

Masalah Nilai Awal (MNA) adalah menemukan semua solusi y untuk

$$y' = ay + b$$

yang memenuhi kondisi awal

$$y(t_0) = y_0$$

dimana a, b, t_0, dan y_0 adalah konstanta yang diberikan.

Contoh 1.1.5

Tentukan solusi khusus dari MNA berikut:

$$y' = 2y + 3, \qquad y(0) = 1.$$

Latihan 1.1.6

Tentukan solusi khusus dari MNA berikut:

$$y' = -3y + 1, \qquad y(0) = 1.$$

Penyelesaian PDB Linier Tk. 1 (Koef. Variabel)

Metode penyelesaiannya mirip dengan koef. konstan, namun a dan b merupakan fungsi waktu, yaitu $a(t)$ dan $b(t)$.

Metode faktor pengintegral

Bentuk umum:

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$$

Kunci: Faktor pengintegral

$$v(t) = e^{-\int a(t)\ dt}$$

Penyelesaian Umum (PU):

$$y(t)v(t) = \int b(t)v(t)\ dt$$

Contoh 1.1.7

Tentukan solusi dari PDB linier Tk. 1 berikut:

a. $y' = \frac{3}{t}y + t^5$ b. $ty' = -2y + 4t^2$

Masalah Nilai Awal PDB Linier Tk. 1 (Koef. Variabel)

Definisi 1.1.3

Masalah Nilai Awal (MNA) adalah menemukan semua solusi y untuk

$$y' = a(t)y + b(t)$$

yang memenuhi kondisi awal

$$y(t_0) = y_0$$

dimana $a(t)$, $b(t)$ adalah fungsi-fungsi yang diberikan dan t_0, y_0 adalah konstanta yang diberikan.

Contoh 1.1.8

Tentukan solusi khusus dari MNA berikut:

$$ty' + 2y = 4t^2, \qquad t > 0, \qquad y(1) = 2.$$

PDB Bernoulli

PDB Bernoulli adalah PDB nonlinier yang dapat diubah menjadi PDB linier.

Definisi 1.2.1

PDB Bernoulli diberikan oleh

$$y' = a(t)y + b(t)y^n \tag{3}$$

dimana $a(t)$, $b(t)$ adalah fungsi-fungsi yang diberikan dan $n \in \mathbb{R}$.

Solusi PDB Bernoulli

Bentuk umum:

$$y' = a(t)y + b(t)y^n$$

Kunci: Substitusi

$$x = y^{1-n}$$

sehingga menjadi PDB linier Tk. 1, selanjutnya selesaikan seperti cara di PDB linier Tk. 1.

PDB Bernoulli: Contoh

Contoh 1.2.1

Tentukan solusi dari:

a. $y' = y + 2y^5$ b. $ty' = 3y + t^5 y^{1/3}$

Latihan 1.2.2

Tentukan solusi dari PDB Bernoulli berikut:

$$y' + ty = ty^2$$

Latihan 1.2.3

Tentukan solusi khusus dari MNA berikut:

$$y' = y + \frac{3}{y^2}, \qquad y(0) = 1$$