Transformasi Laplace untuk Penyelesaian PDB

Laplace Transform for Solving ODE

Heri Purnawan
Disampaikan pada Mata Kuliah Matematika Teknik II (TE4485)

Program Studi S-1 Teknik Elektro
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Lamongan

2025

Transformasi Laplace

Salah satu metode yang bisa diterapkan untuk menyelesaikan PDB khususnya linier adalah dengan transformasi Laplace, yaitu dengan mengubahnya dari domain waktu menjadi domain frekuensi.

Definisi Transformasi Laplace

$$\mathcal{L}\left[f(t)\right] = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\, dt \tag{1}$$

Selanjutnya untuk mendapatkan solusi PDBnya, maka digunakan invers transformasi Laplace, yaitu proses yang digunakan untuk mengubah fungsi di domain frekuensi (fungsi Laplace) kembali ke domain waktu.

Invers Transformasi Laplace

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right] \tag{2}$$

Invers Transformasi Laplace

Secara formal, invers transformasi Laplace diberikan oleh integral kontur kompleks yang dikenal sebagai **integral Bromwich**:

Invers transformasi Laplace

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma - j\infty}^{\gamma + j\infty} F(s) e^{st} \, ds \tag{3}$$

- γ adalah garis vertikal dalam bidang kompleks, yang terletak di sebelah kanan semua poles dari $F(s)$
- j adalah bilangan imajiner murni

Namun, dalam praktiknya, invers transformasi Laplace sering kali dilakukan dengan menggunakan tabel transformasi Laplace.

Contoh transformasi Laplace

Contoh 3.1

Tentukan $F(s)$ dengan definisi transformasi Laplace pada Pers. (1), jika $f(t) = 1$.

Jawab: berdasarkan definisi transformasi Laplace,

$$F(s) = \mathcal{L}\left(f(t)\right) = \int_0^\infty e^{-st}\, dt = \lim_{a\to\infty} \int_0^a e^{-st}\, dt = -\frac{1}{s} \lim_{a\to\infty} \left[e^{-st}\right]_0^a = -\frac{1}{s} \lim_{a\to\infty} \left(e^{-sa} - 1\right)$$

$$= -\frac{1}{s}(0-1) = \frac{1}{s}$$

Latihan 3.2

(Tugas untuk anda) tentukan $F(s)$ dengan definisi transformasi Laplace pada Pers. (1), jika

1. $f(t) = t$
2. $f(t) = e^{-at}$

Tabel Transformasi Laplace

Tabel 3.1 Transformasi Laplace

Item no.	$f(t)$	$F(s)$
1.	$\delta(t)$	1
2.	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
3.	$tu(t)$	$\frac{1}{s^2}$
4.	$t^n u(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
5.	$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$
6.	$\sin \omega t u(t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
7.	$\cos \omega t u(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$

Teorema Dalam Transformasi Laplace

Beberapa teorema dalam transformasi Laplace

- Sifat kelinieran

$$\mathcal{L}[kf(t)] = kF(s) \tag{4}$$

$$\mathcal{L}[f_1(t) + f_2(t)] = F_1(s) + F_2(s) \tag{5}$$

Bukti:

- Pembuktian untuk Pers. (4)

$$\mathcal{L}[kf(t)] = \int_0^\infty kf(t)e^{-st}\ dt = k\int_0^\infty f(t)e^{-st}\ dt = kF(s)$$

- Pembuktian untuk Pers. (5)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f_1(t) + f_2(t)] &= \int_0^\infty (f_1(t) + f_2(t))e^{-st}\ dt \\ &= \int_0^\infty f_1(t)e^{-st} + f_2(t)e^{-st}\ dt \\ &= \int_0^\infty f_1(t)e^{-st}\ dt + \int_0^\infty f_2(t)e^{-st}\ dt = F_1(s) + F_2(s)\end{aligned}$$

Teorema Dalam Transformasi Laplace (lanj.)

- Sifat pergeseran frekuensi (Buktikan!)

$$\mathcal{L}[e^{-at}f(t)] = F(s+a) \tag{6}$$

- Sifat pergeseran waktu (Buktikan!)

$$\mathcal{L}[f(t-T)] = e^{-sT}F(s) \tag{7}$$

- Penskalaan (Buktikan!)

$$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right) \tag{8}$$

- Teorema diferensiasi (Buktikan!)

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n f}{dt^n}\right] = s^n F(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} f^{k-1}(0) \tag{9}$$

- Teorema integrasi (Buktikan!)

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)\, d\tau\right] = \frac{F(s)}{s} \tag{10}$$

Pecahan Parsial dalam Bentuk Laplace

- Penguraian Pecahan Parsial
  - Untuk menemukan invers transformasi Laplace dari fungsi yang rumit.
  - Mengubah fungsi tersebut menjadi penjumlahan dari beberapa suku yang lebih sederhana.
  - Setiap suku memiliki transformasi Laplace yang telah diketahui.
- Jika $F_1(s) = N(s)/D(s)$, di mana derajat $N(s)$ kurang dari derajat $D(s)$, maka penguraian pecahan parsial dapat dibuat. Jika derajat $N(s)$ lebih besar dari atau sama dengan derajat $D(s)$, maka $N(s)$ harus dibagi dengan $D(s)$ secara berturut-turut sampai memiliki sisa yang derajat pembilangnya kurang dari penyebutnya.
- Contoh:

$$F(s) = \frac{s^3 + 2s^2 + 6s + 7}{s^2 + s + 5} \rightarrow F(s) = s + 1 + \frac{2}{s^2 + s + 5}$$

Bentuk Pecahan Parsial

- Terdapat tiga kasus bagaimana F bisa diperluas menjadi pecahan parsial.
  - Kasus 1: Akar penyebut $F(s)$ real dan berbeda
    Contoh:
    $$F(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)} \to \frac{2}{(s+1)(s+2)} = \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{s+2}$$
    diperoleh: $K_1 = 2$ dan $K_2 = -2$, maka
    $$F(s) = \frac{2}{s+1} - \frac{2}{s+2} \to \mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s+1} - \frac{2}{s+2}\right]$$
    Berdasarkan Tabel 1, maka
    $$f(t) = 2e^{-t} - 2e^{-2t}$$

Bentuk Pecahan Parsial (lanjutan)

- Terdapat tiga kasus bagaimana F bisa diperluas menjadi pecahan parsial.
  - Kasus 2: Akar penyebut $F(s)$ real dan kembar
    Contoh:
    $$F(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)^2}$$
    maka
    $$F(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)^2} = \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{(s+2)^2} + \frac{K_3}{s+2}$$
    diperoleh: $K_1 = 2, K_2 = -2$, dan $K_3 = -2$, sehingga
    $$F(s) = \frac{2}{s+1} - \frac{2}{(s+2)^2} - \frac{2}{s+2}$$
    Berdasarkan Tabel 1, maka
    $$f(t) = 2e^{-t} - 2te^{-2t} - 2e^{-2t}$$

Bentuk Pecahan Parsial (lanjutan)

- Terdapat tiga kasus bagaimana F bisa diperluas menjadi pecahan parsial.
  - Kasus 3: Akar penyebut $F(s)$ imajiner

    Contoh:

$$F(s) = \frac{3}{s(s^2+2s+5)} \to \frac{3}{s(s^2+2s+5)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2 s + K_3}{s^2+2s+5}$$

diperoleh: $K_1 = \frac{3}{5}, K_2 = -\frac{3}{5}$, dan $K_3 = -\frac{6}{5}$ maka

$$F(s) = \frac{3/5}{s} - \frac{3}{5}\frac{s+2}{s^2+2s+5}$$

Berdasarkan Tabel 1 and Tabel 2.2 (lihat penjelasan[1]), maka

$$f(t) = \frac{3}{5} - \frac{3}{5}e^{-t}\left(\cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)$$

[1] Norman S. Nise, "Control System Engineering"

Contoh penggunaan transformasi Laplace

Contoh 3.2 transformasi Laplace untuk penyelesaian PDB Tk. 2

Diketahui persamaan diferensial berikut, selesaikan $y(t)$ jika semua kondisi awal adalah nol. Gunakan transformasi Laplace.

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 12\frac{dy(t)}{dt} + 32y(t) = 32 \tag{11}$$

Jawab: Gunakan no. 2 pada Tabel 3.1 dan teorema diferensiasi pada Pers. (9), maka transformasi Laplace dari Pers. (11) adalah

$$s^2Y(s) + 12sY(s) + 32Y(s) = \frac{32}{s} \tag{12}$$

Penyelesaian $Y(s)$ menghasilkan

$$Y(s) = \frac{32}{s(s^2 + 12s + 32)} = \frac{32}{s(s+4)(s+8)}$$

Lanjutan solusi Contoh 3.2

Mengacu pada Kasus 1, maka

$$Y(s) = \frac{32}{s(s+4)(s+8)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+4} + \frac{K_3}{s+8} \tag{13}$$

Diperoleh nilai $K_1 = 1$, $K_2 = -2$, dan $K_3 = 1$, sehingga

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{2}{s+4} + \frac{1}{s+8}$$

Dengan invers transformasi Laplace, maka diperoleh

$$y(t) = 1 - 2e^{-4t} + e^{-8t}$$

Latihan

1. Tentukan solusi khusus dari MNA berikut:

$$y' = 2y + 3, \qquad y(0) = 1.$$

   Selanjutnya bandingkan hasilnya dengan penyelesaian menggunakan PDB linier Tk. 1. Apa kesimpulan anda?

2. Dari Contoh di materi sebelumnya (PDB linier tk. 2 tak-homogen):
   a. $y'' - 5y' + 6y = t$ (Contoh 2.2.1)
   b. $y'' - 4y' = t$ (Contoh 2.2.1)
   c. $y'' - 4y' + 4y = e^t$ (Contoh 2.2.2)
   d. $y'' - 5y' + 6y = e^{2t}$ (Contoh 2.2.3)
   e. $y'' - 4y' + 4y = e^{2t}$ (Contoh 2.2.3)
   f. $y'' - 4y' + 5y = \sin t$ (Contoh 2.2.4)

   Andaikan syarat awalnya adalah $y'(0) = y(0) = 0$, apakah mungkin untuk menyelesaikannya dengan transformasi Laplace? Apakah hasil yang diperoleh sama dengan metode koefisien tak tentu?