# Kestabilan

**Heri Purnawan**

Disampaikan pada matakuliah **Dasar Sistem Kendali**
Program Studi S-1 Teknik Elektro
Fakultas Sains dan Teknologi (FST)
Universitas Islam Lamongan (UNISLA)

November 26, 2024

Email: heripurnawan@unisla.ac.id

# Capaian Pembelajaran

- Membuat dan menginterpretasikan tabel Routh dasar untuk mengetahui kestabilan suatu sistem.
- Membuat dan menafsirkan tabel Routh dengan elemen pertama dari suatu baris adalah nol atau seluruh baris adalah nol.
- Menggunakan tabel Routh untuk menentukan stabilitas sistem yang direpresentasikan dalam ruang keadaan.

# Pendahuluan

- Ada tiga persyaratan untuk merancang sistem kendali: respons transien, stabilitas, dan kesalahan kondisi tunak (*steady-state error*).
- Sistem yang tidak stabil tidak dapat dirancang untuk respons transien tertentu atau persyaratan kesalahan kondisi tunak.
- Respon total suatu sistem adalah jumlah dari respons *forced* (sistem akibat adanya input eksternal) dan alami (*natural*), atau

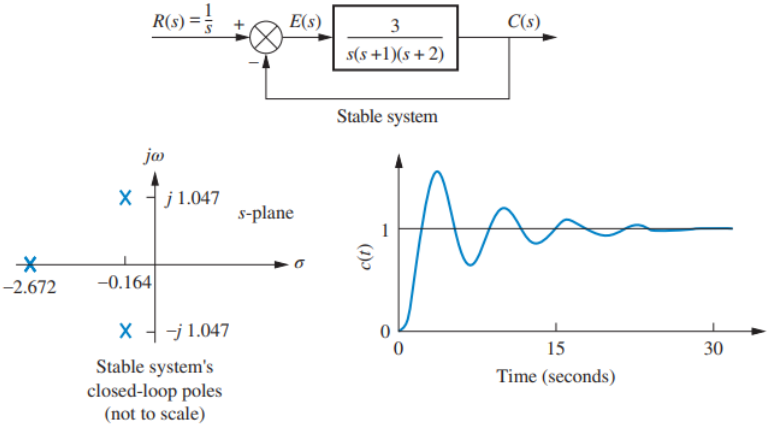
$$c(t) = c_{\text{forced}}(t) + c_{\text{natural}}(t)$$

  Dengan menggunakan konsep-konsep tersebut, pengertian stabilitas, ketidakstabilan, dan stabilitas marjinal adalah:
  - Sistem linier tak bergantung waktu (*time-invariant*) akan stabil jika respons alaminya mendekati nol ketika waktu mendekati tak terhingga.
  - Sistem linier *time-invariant* tidak stabil jika respons alaminya tumbuh tanpa batas seiring waktu mendekati tak terhingga.
  - Sistem linier *time-invariant marginally stable* jika respons alaminya tidak berkurang atau bertambah, tetapi tetap konstan atau berosilasi seiring waktu mendekati tak terhingga.

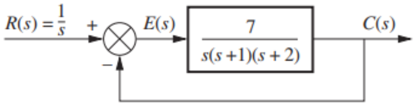
# Pendahuluan

- Suatu sistem dikatakan stabil jika *setiap* masukan yang terbatas (*bounded inputs*) menghasilkan keluaran yang terbatas (*bounded outputs*).
- Suatu sistem dikatakan tak stabil jika *setiap* masukan yang terbatas (*bounded inputs*) menghasilkan keluaran yang tak terbatas (*unbounded outputs*).
- Sistem stabil memiliki fungsi alih loop tertutup (closed-loop transfer functions) dengan *poles* hanya pada setengah bidang kiri (left half-plane).
- Sistem tak stabil memiliki fungsi alih loop tertutup dengan *setidaknya* satu *pole* di setengah bidang kanan dan/atau pole kelipatan lebih besar dari 1 pada sumbu imajiner.
- Sistem yang stabil marginal memiliki fungsi alih loop tertutup dengan hanya *pole* pada sumbu imajiner dengan kelipatan 1 dan *pole* di separuh bidang kiri.

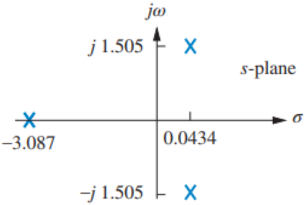
# Pendahuluan



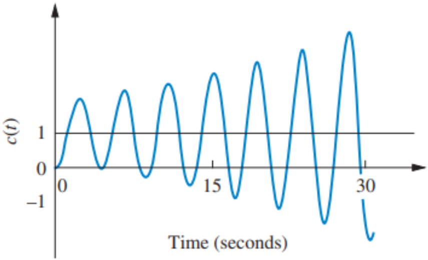
# Pendahuluan




Unstable system




Unstable system's closed-loop poles (not to scale)



# Kriteria Routh-Hurwitz

- Sebuah metode yang menghasilkan informasi stabilitas tanpa perlu menyelesaikan *pole* sistem loop tertutup.
- Metode ini mengetahui berapa banyak *pole* sistem loop tertutup yang berada pada setengah bidang kiri, setengah bidang kanan, dan pada sumbu $j\omega$. (Perhatikan bahwa kami menyebutkan berapa banyak, bukan di mana).
- Metode ini memerlukan dua langkah:
  (1) Membuat tabel data yang disebut tabel Routh dan
  (2) Menginterpretasikan tabel Routh untuk mengetahui berapa banyak *pole* sistem loop tertutup yang berada pada setengah bidang kiri, setengah bidang kanan, dan pada sumbu $j\omega$.

**Syarat Cukup untuk Stabilitas Routh-Hurwitz**

Syarat cukup adalah semua elemen kolom pertama tabel Routh harus mempunyai tanda yang sama. Artinya semua elemen kolom pertama tabel Routh harus positif atau negatif.

# Tabel Routh

Diberikan persamaan karakteristik sebagai berikut:

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_{n-1} s^1 + a_n s^0$$

menghasilkan

$$\begin{array}{c|ccccc}
s^n & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots \\
s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots \\
s^{n-2} & b_1 = -\frac{\begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix}}{a_1} & b_2 = -\frac{\begin{vmatrix} a_0 & a_4 \\ a_1 & a_5 \end{vmatrix}}{a_1} & b_3 = -\frac{\begin{vmatrix} a_0 & a_6 \\ a_1 & a_7 \end{vmatrix}}{a_1} & \cdots & \cdots \\
s^{n-3} & c_1 = -\frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & a_3 \end{vmatrix}}{b_1} & c_2 = -\frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_5 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{b_1} & \vdots & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\
s^1 & \vdots & \vdots & & & \\
s^0 & \vdots & & & &
\end{array}$$

Banyaknya perubahan tanda pada kolom pertama dari tabel Routh memberikan informasi banyaknya akar persamaan karakteristik yang ada di separuh bidang kanan '$s$' dan sistemnya adalah tak stabil.

# Contoh Routh Hurwitz

## Contoh 1

Tentukan kestabilan sistem yang mempunyai persamaan karakteristik,

$$s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 2s + 1 = 0$$

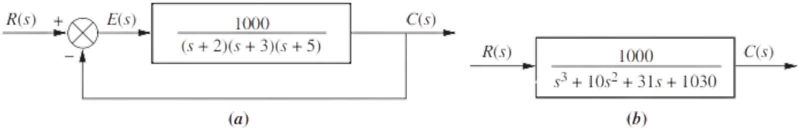
Solusi: Tabel Routh diberikan oleh

$$
\begin{array}{c|ccc}
s^4 & 1 & 3 & 1 \\
s^3 & 3 & 2 & 0 \\
s^2 & b_1 = -\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}{3} = \frac{7}{3} & b_2 = -\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}}{3} = 1 & \\
s^1 & c_1 = -\dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ \frac{7}{3} & 1 \end{vmatrix}}{\frac{7}{3}} = \frac{5}{7} & 0 & \\
s^0 & d_1 = -\dfrac{\begin{vmatrix} \frac{7}{3} & 1 \\ \frac{5}{7} & 0 \end{vmatrix}}{\frac{5}{7}} = 1 & &
\end{array}
$$

Semua elemen kolom pertama tabel Routh adalah positif. Tidak ada perubahan tanda pada kolom pertama tabel Routh. Jadi, sistemnya stabil.

# Contoh Routh Hurwitz (lanj.)

Contoh 2: Gunakan tabel Routh untuk menentukan kestabilan sistem berikut.




Gambar 1: (a) system umpan balik; (b) sistem loop tertutup yang setara

# Solusi Contoh 2

Solusi: Tabel Routh diberikan oleh

$$
\begin{array}{c|ccc}
s^3 & 1 & 31 & 0 \\
s^2 & 10 & 1030 & 0 \\
s^1 & -\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 31 \\ 10 & 1030 \end{vmatrix}}{10} = -72 & -\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 10 & 0 \end{vmatrix}}{10} = 0 & 0 \\
s^0 & -\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1030 \\ -72 & 0 \end{vmatrix}}{-72} = 103 & 0 &
\end{array}
$$

Pada tabel Routh terlihat adanya perubahan tanda pada kolom pertama yang berwarna merah. Jadi, ada dua akar persamaan karakteristik di separuh bidang kanan '$s$' dan sistemnya adalah tak stabil.

**Matlab Results**

Dengan menggunakan Matlab diperoleh akar-akar persamaan karakteristik sebagai berikut: $-13.4136$, $1.7068 + 8.5950j$, dan $1.7068 - 8.5950j$.

# Kriteria Routh-Hurwitz: Kasus Khusus

Dua kasus khusus dapat terjadi:

1. Tabel Routh terkadang di kolom pertama bernilai nol dari sebuah baris, atau
2. Tabel Routh terkadang memiliki seluruh baris yang bernilai nol.

### Nol Hanya di Kolom Pertama (Kasus: 1)

Jika elemen pertama suatu baris adalah nol, maka diperlukan pembagian dengan nol untuk membentuk baris berikutnya. Untuk menghindari kasus ini, sebuah epsilon, $\epsilon$, digunakan untuk menggantikan angka nol di kolom pertama. Nilai $\epsilon$ kemudian dibiarkan mendekati nol baik dari sisi positif atau negatif, setelah itu tanda-tanda entri di kolom pertama dapat ditentukan.

### Contoh 3: Stabilitas melalui Epsilon

PROBLEM: Tentukan kestabilan fungsi transfer loop tertutup

$$T(s) = \frac{10}{s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 6s^2 + 5s + 3}$$

# Solusi Contoh 3

Table 1. Tabel Routh pada Contoh 3 adalah

| | | | |
|---|---|---|---|
| $s^5$ | $1$ | $3$ | $5$ |
| $s^4$ | $2$ | $6$ | $3$ |
| $s^3$ | $\cancel{0}\ \epsilon$ | $\frac{7}{2}$ | $0$ |
| $s^2$ | $\frac{6\epsilon-7}{\epsilon}$ | $3$ | $0$ |
| $s^1$ | $\frac{42\epsilon-49-6\epsilon^2}{12\epsilon-14}$ | $0$ | $0$ |
| $s^0$ | $3$ | $0$ | $0$ |

Table 2. Tanda kolom pertama

| Label | First column | $\epsilon = +$ | $\epsilon = -$ |
|---|---|---|---|
| $s^5$ | $1$ | $+$ | $+$ |
| $s^4$ | $2$ | $+$ | $+$ |
| $s^3$ | $\cancel{0}\ \epsilon$ | $+$ | $-$ |
| $s^2$ | $\frac{6\epsilon-7}{\epsilon}$ | $-$ | $+$ |
| $s^1$ | $\frac{42\epsilon-49-6\epsilon^2}{12\epsilon-14}$ | $+$ | $+$ |
| $s^0$ | $3$ | $+$ | $+$ |

- Jika $\epsilon$ dipilih positif, Tabel 2 menunjukkan perubahan tanda dari baris $s^3$ ke baris $s^2$, dan akan terjadi perubahan tanda lagi dari baris $s^2$ baris ke baris $s^1$. Oleh karena itu, sistemnya adalah tak stabil dan memiliki dua poles pada setengah bidang kanan.
- Alternatif lain yaitu memilih $\epsilon$ negatif. Tabel 2 menunjukkan perubahan tanda dari baris $s^4$ ke baris $s^3$ dan dari baris $s^3$ ke baris $s^2$. Hasil ini sama dengan hasil untuk $\epsilon$ positif. Jadi, sistemnya adalah tak stabil, dengan dua *pole* pada setengah bidang kanan.

# Kriteria Routh-Hurwitz: Kasus Khusus

## Seluruh Baris Bernilai Nol (Kasus: 2)

Terkadang saat membuat tabel Routh, kita menemukan bahwa seluruh baris terdiri dari nol karena terdapat polinomial genap yang merupakan faktor dari polinomial aslinya. Kasus ini harus ditangani secara berbeda dari kasus nol yang hanya terjadi pada kolom pertama dari sebuah baris.

## Contoh 4

PROBLEM: Tentukan banyaknya *pole* pada setengah bidang kanan dari fungsi transfer loop tertutup

$$T(s) = \frac{10}{s^5 + 7s^4 + 6s^3 + 42s^2 + 8s + 56}$$

# Solusi Contoh 4

Table 3. Tabel Routh untuk Contoh 4

| | | | |
|---|---|---|---|
| $s^5$ | $1$ | $6$ | $8$ |
| $s^4$ | $\cancel{7}\ 1$ | $\cancel{42}\ 6$ | $\cancel{56}\ 8$ |
| $s^3$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| $s^2$ | | | |
| $s^1$ | | | |
| $s^0$ | | | |

Table 3 menunjukkan semua elemen baris $s^3$ adalah nol.
Pada baris kedua kita mengalikannya dengan $1/7$ untuk memudahkan (lihat Tabel 3). Kami berhenti di baris ketiga, karena seluruh baris terdiri dari nol, dan menggunakan prosedur berikut.

- Pertama, kembali ke baris tepat di atas baris nol dan bentuklah polinomial bantu, dengan menggunakan entri pada baris tersebut sebagai koefisien. Polinomial akan dimulai dengan pangkat $s$ di kolom label dan dilanjutkan dengan melewatkan setiap pangkat $s$ lainnya.

$$P(s) = s^4 + 6s^2 + 8$$

# Solusi Contoh 4 (lanj.)

- Selanjutnya, kita menurunkan polinomial terhadap $s$ dan mendapatkan

$$\frac{dP(s)}{ds} = 4s^3 + 12s \tag{1}$$

- Akhirnya, kita menggunakan koefisien Persamaan (1) untuk mengganti baris angka nol. Sekali lagi, untuk kenyamanan, baris ketiga dikalikan dengan $1/4$ setelah mengganti angka nol.

Table 4. Tabel Routh untuk Contoh 4

| | | | |
|---|---|---|---|
| $s^5$ | $1$ | $6$ | $8$ |
| $s^4$ | $\cancel{7}\ 1$ | $\cancel{42}\ 6$ | $\cancel{56}\ 8$ |
| $s^3$ | $\cancel{0}\ \cancel{4}\ 1$ | $\cancel{0}\ \cancel{12}\ 3$ | $\cancel{0}\ \cancel{0}\ 0$ |
| $s^2$ | $3$ | $8$ | $0$ |
| $s^1$ | $\frac{1}{3}$ | $0$ | $0$ |
| $s^0$ | $8$ | $0$ | $0$ |

Tabel 4 menunjukkan bahwa semua entri di kolom pertama adalah positif. Oleh karena itu, tidak ada pole di setengah bidang kanan.

# Stabilitas di Ruang Keadaan

Pada bagian sebelumnya, kita telah menyebutkan bahwa nilai *pole* sistem sama dengan nilai eigen matriks sistem, $\mathbf{A}$. Kita menyatakan bahwa nilai eigen matriks $\mathbf{A}$ adalah solusi persamaan

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0 \tag{2}$$

yang juga menghasilkan *pole* dari fungsi transfer. Arti lain, Persamaan (2) adalah persamaan karakteristik sistem yang menentukan *pole* dari sistem.

## Contoh 5

PROBLEM: Diberikan sistem

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 8 & 1 \\ -10 & -5 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

tentukan banyaknya *pole* pada setengah bidang kiri dan setengah bidang kanan.

# Solusi Contoh 5

Bentuk pertama $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$:

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 8 & 1 \\ -10 & -5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -3 & -1 \\ -2 & s-8 & -1 \\ 10 & 5 & s+2 \end{bmatrix}$$

Sekarang hitung $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$:

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = s^3 - 6s^2 - 7s - 52$$

Table 5. Tabel Routh untuk Contoh 5

| | | |
|---|---|---|
| $s^3$ | $1$ | $-7$ |
| $s^2$ | $\cancel{-6}$ $-3$ | $\cancel{-52}$ $-26$ |
| $s^1$ | $\cancel{-\frac{47}{3}}$ $-1$ | $\cancel{0}$ $0$ |
| $s^0$ | $-26$ | |

Karena ada satu perubahan tanda pada kolom pertama, sistem mempunyai satu *pole* di setengah bidang kanan dan dua *pole* di setengah bidang kiri. Oleh karena itu, sistemnya tak stabil.

# Plot Sistem pada Contoh 5

*Poles*: $7.7642$, $-0.8821 + 2.4330j$, dan $-0.8821 - 2.4330j$.