Pemodelan Dalam Domain Frekuensi

Heri Purnawan

Disampaikan pada matakuliah **Dasar Sistem Kontrol**
Program Studi S-1 Teknik Elektro
Fakultas Sains dan Teknologi (FST)
Universitas Islam Lamongan (UNISLA)

November 19, 2024

Email: heripurnawan@unisla.ac.id

Pokok bahasan

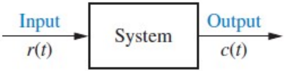
- Pendahuluan
- Fungsi transfer
    - Fungsi transfer sistem jaringan listrik
    - Fungsi transfer sistem mekanik translasi
    - Fungsi transfer sistem mekanik rotasi
- Ketaklinieran dan linierisasi

Gambaran Umum

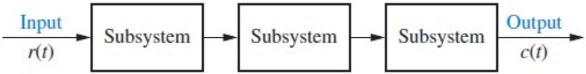
- **Tujuan**: Mengembangkan model matematika dari diagram skematik sistem fisik.
- **Dua Metode**:
  - Fungsi Transfer (dalam domain frekuensi)
  - Persamaan Ruang Keadaan (dalam domain waktu)
- Hukum Fisika dan Teknik digunakan sebagai dasar dalam membuat model sistem.
- Contoh:
  - Sistem Elektrikal:
    - Hukum Ohm dan Hukum Kirchhoff sebagai dasar.
    - Menjumlahkan tegangan dalam loop atau arus pada simpul.
  - Sistem Mekanikal:
    - Hukum Newton sebagai prinsip utama.
    - Menjumlahkan gaya atau torsi pada sistem mekanikal.
- Dari persamaan-persamaan tersebut, diperoleh hubungan antara keluaran (*output*) dan masukan (*input*) sistem.

Representasi Matematika dalam Sistem Kontrol

- **Preferensi Representasi**:
  - Memilih representasi matematika seperti yang ditunjukkan pada Gambar 1(a), di mana masukan (input), keluaran (output), dan sistem adalah bagian yang terpisah dan jelas.



(a) sistem



(b) sub-sistem interkoneksi

Gambar 1: Representasi diagram blok

Representasi Matematika dalam Sistem Kontrol

- **Kebutuhan Representasi**:
  - Kita juga ingin merepresentasikan interkoneksi dari beberapa subsistem dengan mudah.
  - Contoh: Interkoneksi berurutan (*cascaded*) seperti yang terlihat pada Gambar 1(b), dimana:
    - Fungsi matematika yang disebut fungsi transfer berada di dalam setiap blok.
    - Fungsi blok ini dapat dengan mudah digabungkan untuk mendapatkan representasi seperti Gambar 1(a) untuk memudahkan analisis dan desain.
- **Keunggulan Fungsi Transfer**:
  - Fungsi transfer menawarkan kenyamanan yang tidak bisa diperoleh melalui persamaan diferensial.

Fungsi Transfer

- Perbandingan transformasi Laplace dari keluaran dengan transformasi Laplace dari masukkan dengan asumsi bahwa kondisi awal adalah nol.
- Sistem persamaan diferensial linier *time-invariant* dinyatakan oleh persamaan diferensial berikut:

$$a_0 \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dy(t)}{dt} + a_n y(t) = b_0 \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_{m-1} \frac{dx(t)}{dt} + b_m x(t), n \geq m$$

dimana y adalah keluaran dari sistem dan x adalah masukkan.

- Fungsi alih dari sistem tersebut adalah

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n}$$

Contoh Fungsi Transfer

Contoh 2:
Tentukan fungsi transfer dari

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$$

dengan asumsi kondisi awal bernilai nol.
Jawab:
Dengan transformasi Laplace kedua sisi

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{x(t)\right\}$$

$$sY(s) + 2Y(s) = X(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s+2}$$

Respon sistem dari fungsi transfer

Tentukan respon sistem untuk input *unit step* $x(t) = u(t)$ pada Contoh 2.
Karena kondisi awal adalah nol,

$$Y(s) = X(s)G(s) = \frac{1}{s}\frac{1}{s+2} = \frac{1}{s(s+2)}$$

Dapat diubah menjadi

$$Y(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2}$$

diperoleh $A = \frac{1}{2}$ dan $B = -\frac{1}{2}$, maka

$$Y(s) = \frac{1/2}{s} - \frac{1/2}{s+2}$$

dengan invers transformasi Laplace, maka

$$y(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t}$$

Latihan Fungsi Transfer

Latihan 3: Tentukan fungsi transfer, $G(s) = Y(s)/X(s)$ dari persamaan diferensial berikut.

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 3\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 7\frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} + 4\frac{dx(t)}{dt} + 3x(t)$$

Jawab:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s^2 + 4s + 3}{s^3 + 3s^2 + 7s + 5}$$

Latihan 4: Tentukan persamaan diferensial dari fungsi transfer berikut.

$$G(s) = \frac{2s + 1}{s^2 + 6s + 2}$$

Jawab:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 6\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 2\frac{dx(t)}{dt} + x(t)$$

Fungsi transfer jaringan listrik

- Prinsip panduannya adalah hukum Kirchhoff, yaitu menjumlahkan tegangan di sekitar loop atau arus di node.
- Rangkaian ekivalen untuk jaringan listrik komponen linier pasif: resistor, kapasitor, dan induktor (dalam kondisi awal nol)[1].

TABLE 2.3 Voltage-current, voltage-charge, and impedance relationships for capacitors, resistors, and inductors

Component	Voltage-current	Current-voltage	Voltage-charge	Impedance $Z(s) = V(s)/I(s)$	Admittance $Y(s) = I(s)/V(s)$
 Capacitor	$v(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau$	$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$	$v(t) = \frac{1}{C}q(t)$	$\frac{1}{Cs}$	Cs
 Resistor	$v(t) = Ri(t)$	$i(t) = \frac{1}{R}v(t)$	$v(t) = R\frac{dq(t)}{dt}$	R	$\frac{1}{R} = G$
 Inductor	$v(t) = L\frac{di(t)}{dt}$	$i(t) = \frac{1}{L}\int_0^t v(\tau)d\tau$	$v(t) = L\frac{d^2q(t)}{dt^2}$	Ls	$\frac{1}{Ls}$

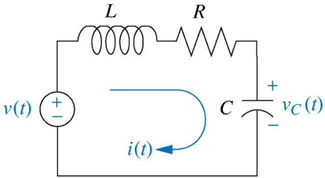
Note: The following set of symbols and units is used throughout this book: $v(t)$ – V (volts), $i(t)$ – A (amps), $q(t)$ – Q (coulombs), C – F (farads), R – Ω (ohms), G – Ω (mhos), L – H (henries).

[1] Pasif berarti tidak ada sumber energi internal

Fungsi transfer jaringan listrik

- Analisis mesh/loop
  Fungsi transfer dapat diperoleh dengan menggunakan hukum tegangan **Kirchhoff** dan menjumlahkan tegangan di sekitar *loop* atau *mesh*. Metode ini disebut analisis *loop* atau *mesh*.

  Contoh 1: Tentukan fungsi transfer $\frac{V_c(s)}{V(s)}$ dari rangkaian listrik berikut.



dimana, R menyatakan resistor, L adalah induktor/kumparan, C adalah kapasitor, i adalah arus, v adalah tegangan, dan v_C adalah tegangan pada kapasitor.

Solusi Contoh 1

Dari Hukum Kirchhoff:

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C}\int i(t)dt = v(t)$$
$$\frac{1}{C}\int i(t)dt = v_C(t)$$

Menggunakan transformasi Laplace:

$$sLI(s) + RI(s) + \frac{1}{Cs}I(s) = V(s) \rightarrow s^2LI(s) + RsI(s) + \frac{I(s)}{C} = sV(s)$$
$$\frac{1}{sC}I(s) = V_C(s) \rightarrow \frac{I(s)}{C} = sV_C(s)$$

Fungsi transfer:

$$G(s) = \frac{V_C(s)}{V(s)} = \frac{\frac{I(s)}{C}}{\left(s^2L + Rs + \frac{1}{C}\right)I(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

Solusi Contoh 1 (lanj.)

Dengan menggunakan $i(t) = \frac{dq}{dt}$, dimana q adalah muatan listrik pada kapasitor, kita dapat dapatkan

$$L\frac{d^2q(t)}{dt^2} + R\frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{C}q(t) = v(t)$$

Dengan hubungan $q(t) = Cv_C(t)$, maka

$$LC\frac{d^2v_C(t)}{dt^2} + RC\frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t) = v(t)$$

Menggunakan transformasi Laplace:

$$(LCs^2 + RCs + 1)V_C(s) = V(s)$$

Fungsi transfer:

$$G(s) = \frac{V_C(s)}{V(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

Solusi Contoh 1 (lanj.)

Kita juga bisa menggunakan hubungan impedansi seperti yang ditunjukkan dalam Tabel 2.3.

$$
\begin{aligned}
[\text{Sum of impedances}]I(s) &= [\text{Sum of applied voltages}] \\
\left(Ls + R + \frac{1}{Cs}\right) I(s) &= V(s) \qquad (1) \\
\frac{1}{Cs} I(s) &= V_C(s) \qquad (2)
\end{aligned}
$$

maka

$$
G(s) = \frac{V_C(s)}{V(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}
$$

Kita dapatkan hasil yang sama dengan cara sebelumnya.

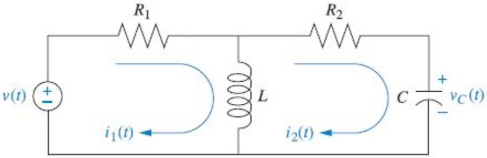
Jaringan kompleks melalui analisis *mesh*

Prosedur penyelesaian jaringan listrik dengan banyak *loop* dan *node* menggunakan analisis *mesh*:

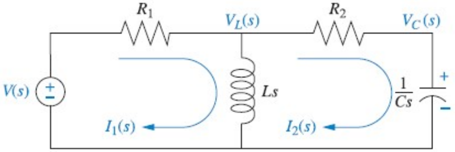
- Gantikan nilai elemen pasif dengan impedansinya.
- Ganti semua sumber dan variabel waktu dengan transformasi Laplace-nya.
- Asumsikan arus transformasi dan arah arus di setiap mesh.
- Tuliskan hukum tegangan Kirchhoff pada setiap *mesh*.
- Selesaikan persamaan secara simultan untuk keluarannya.
- Bentuk fungsi transfer.

Jaringan kompleks melalui analisis *mesh*

Contoh 2: Tentukan fungsi transfer dari $\frac{I_2(s)}{V(s)}$.



Solusi: Langkah pertama adalah mengubah jaringan menjadi transformasi Laplace untuk impedansi dan variabel rangkaian, dengan asumsi kondisi awal nol:



Solusi Contoh 2 (lanj.)

- Di sekitar Mesh 1, dimana $I_1(s)$ mengalir:

$$\begin{aligned} R_1 I_1(s) + LsI_1(s) - LsI_2(s) &= V(s) \\ (R_1 + Ls)I_1(s) - LsI_2(s) &= V(s) \qquad (3) \end{aligned}$$

- Di sekitar Mesh 2, dimana $I_2(s)$ mengalir:

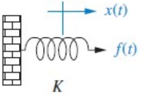
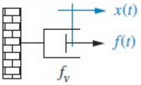
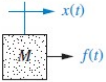
$$\begin{aligned} LsI_2(s) + R_2 I_2(s) + \frac{1}{Cs} I_2(s) - LsI_1(s) &= 0 \\ -LsI_1(s) + (Ls + R_2 + \frac{1}{Cs})I_2(s) &= 0 \qquad (4) \end{aligned}$$

Menyelesaikan (3) dan (4), dengan substitusi atau aturan Cramer, menghasilkan (latihan anda):

$$G(s) = \frac{I_2(s)}{V(s)} = \frac{LCs^2}{(R_1 + R_2)LCs^2 + (R_1 R_2 C + L)s + R_1}$$

Fungsi transfer mekanik translasi

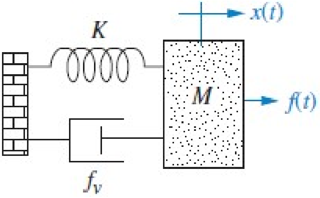
TABLE 2.4 Force-velocity, force-displacement, and impedance translational relationships for springs, viscous dampers, and mass

Component	Force-velocity	Force-displacement	Impedence $Z_M(s) = F(s)/X(s)$
Spring 	$f(t) = K\int_0^t v(\tau)d\tau$	$f(t) = Kx(t)$	K
Viscous damper 	$f(t) = f_v v(t)$	$f(t) = f_v \frac{dx(t)}{dt}$	$f_v s$
Mass 	$f(t) = M\frac{dv(t)}{dt}$	$f(t) = M\frac{d^2x(t)}{dt^2}$	Ms^2

Note: The following set of symbols and units is used throughout this book: $f(t)$ = N (newtons), $x(t)$ = m (meters), $v(t)$ = m/s (meters/second), K = N/m (newtons/meter), f_v = N-s/m (newton-seconds/meter), M = kg (kilograms = newton-seconds^2/meter).

Fungsi transfer mekanik translasi

Contoh 3: Tentukan fungsi transfer $\frac{X(s)}{F(s)}$ untuk sistem pada Gambar 2.



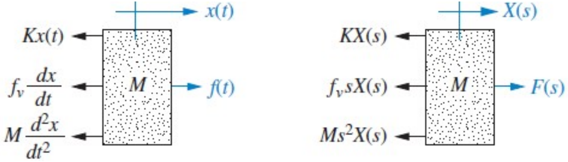
Gambar 2: Sistem massa, pegas, dan peredam

Solusi: menggunakan hukum Newton untuk menjumlahkan semua gaya yang ditunjukkan pada massa menjadi nol.

$$M\frac{d^2x(t)}{dt^2} + f_v\frac{dx(t)}{dt} + Kx(t) = f(t)$$

Solusi Contoh 3 (lanj.)

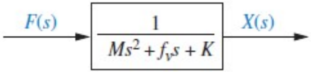
Transformasi Laplace (dengan asumsi kondisi awal nol):



$$Ms^2X(s) + f_v sX(s) + KX(s) = F(s) \rightarrow (Ms^2 + f_v s + K)X(s) = F(s)$$

Fungsi transfernya sebagaimana direpresentasikan pada Gambar 3.

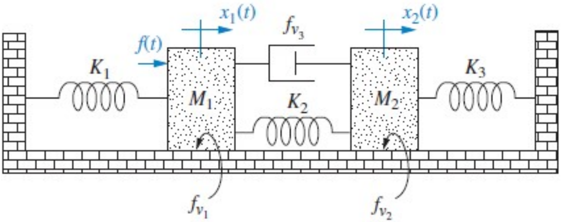
$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ms^2 + f_v s + K}$$



Gambar 3: Diagram blok

Fungsi transfer mekanik translasi

Contoh 4: Tentukan fungsi transfer $\frac{X_2(s)}{F(s)}$ untuk sistem pada Gambar 4.

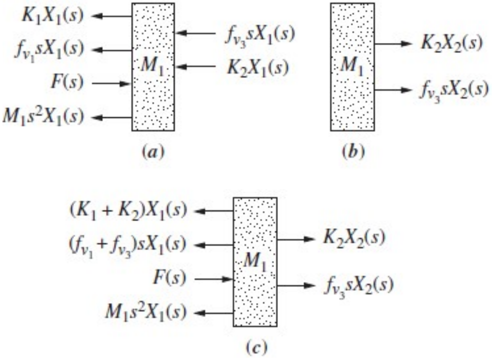


Gambar 4: Sistem mekanik translasi dua derajat kebebasan

Solusi: Sistem ini mempunyai dua derajat kebebasan, karena masing-masing massa dapat dipindahkan ke arah horizontal sementara massa lainnya ditahan. Jadi diperlukan dua persamaan gerak simultan untuk mendeskripsikan sistem.

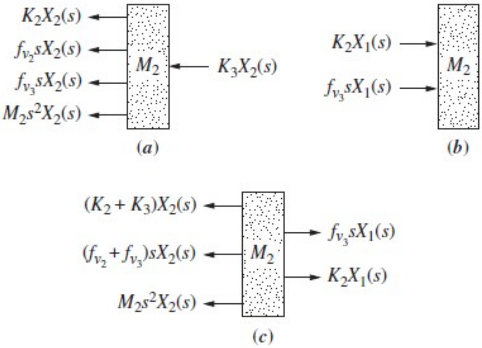
Solusi Contoh 4 (lanj.)

- Gaya pada M_1
  (a) Gaya pada M_1 hanya disebabkan oleh gerak M_1.
  (b) Gaya pada M_1 hanya disebabkan oleh gerak M_2.
  (c) Semua gaya pada M_1.



Solusi Contoh 4 (lanj.)

- Gaya pada M_2
  (a) Gaya pada M_2 hanya disebabkan oleh gerak M_2.
  (b) Gaya pada M_2 hanya disebabkan oleh gerak M_1.
  (c) Semua gaya pada M_2.



Solusi Contoh 4 (lanj.)

Transformasi Laplace dari persamaan gerak sekarang dapat ditulis sebagai

$$[M_1 s^2 + (f_{v_1} + f_{v_3})s + (K_1 + K_2)]X_1(s) - (f_{v_3} s + K_2)X_2(s) = F(s)$$
$$-(f_{v_3} s + K_2)X_1(s) + [M_2 s^2 + (f_{v_2} + f_{v_3})s + (K_2 + K_3)]X_2(s) = 0$$

Dari sini, fungsi transfer, $X_2(s)/F(s)$, adalah

$$G(s) = \frac{X_2(s)}{F(s)} = \frac{(f_{v_3} s + K_2)}{\Delta}$$

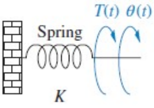
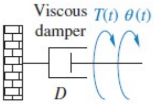
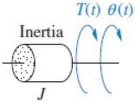
dimana[2]

$$\Delta = \begin{vmatrix} [M_1 s^2 + (f_{v_1} + f_{v_3})s + (K_1 + K_2)] & -(f_{v_3} s + K_2) \\ -(f_{v_3} s + K_2) & [M_2 s^2 + (f_{v_2} + f_{v_3})s + (K_2 + K_3)] \end{vmatrix}$$

[2] $|A|$ adalah determinan dari A

Fungsi transfer sistem mekanik rotasi

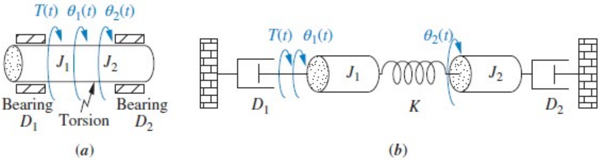
TABLE 2.5 Torque-angular velocity, torque-angular displacement, and impedance rotational relationships for springs, viscous dampers, and inertia

Component	Torque-angular velocity	Torque-angular displacement	Impedence $Z_M(s) = T(s)/\theta(s)$
	$T(t) = K\int_0^t \omega(\tau)d\tau$	$T(t) = K\theta(t)$	K
	$T(t) = D\omega(t)$	$T(t) = D\dfrac{d\theta(t)}{dt}$	Ds
	$T(t) = J\dfrac{d\omega(t)}{dt}$	$T(t) = J\dfrac{d^2\theta(t)}{dt^2}$	Js^2

Note: The following set of symbols and units is used throughout this book: $T(t)$ – N-m (newton-meters), $\theta(t)$ – rad (radians), $\omega(t)$ – rad/s (radians/second), K – N-m/rad (newton-meters/radian), D – N-m-s/rad (newton-meters-seconds/radian). J – kg-m^2(kilograms-meters^2 – newton-meters-seconds^2/radian).

Fungsi transfer sistem mekanik rotasi

Contoh 5: Carilah fungsi transfer $\theta_2(s)/T(s)$. Batang mengalami torsi (*torsion*). Torsi (*torque*) diterapkan di sebelah kiri, dan perpindahan (*displacement*) diukur di sebelah kanan.

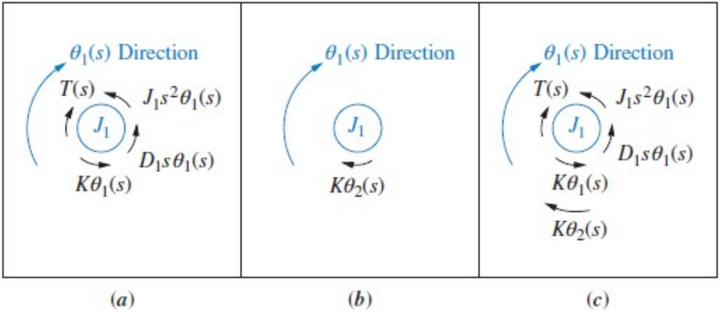


Gambar 5: (a) Sistem fisik; (b) skematika sistem

Solusi: Sistem ini dianggap sebagai sistem parameter yang disamakan. Sehingga torsi berlaku seperti pegas yang terkonsentrasi pada satu titik tertentu pada batang, dengan inersia J_1 ke kiri dan inersia J_2 ke kanan. Redaman di dalam poros fleksibel dapat diabaikan. Ada 2 derajat kebebasan, karena masing-masing inersia dapat diputar sementara inersia lainnya ditahan. Oleh karena itu diperlukan 2 persamaan simultan untuk menyelesaikan sistem tersebut.

Solusi Contoh 5 (lanj.)

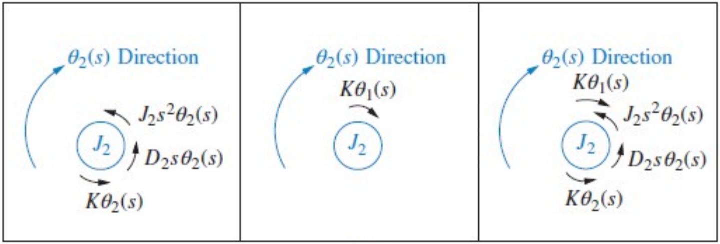
- Diagram benda bebas J_1
  (a) Torsi pada J_1 hanya karena gerakan J_1. J_2 ditahan.
  (b) Torsi pada J_1 hanya disebabkan oleh gerakan J_2. J_1 ditahan.
  (c) Diagram benda bebas terakhir untuk J_1.



Proses yang sama diulangi untuk J_2:

Solusi Contoh 5 (lanj.)

- Diagram benda bebas J_2
  (a) Torsi pada J_2 hanya karena gerakan J_2. J_1 ditahan.
  (b) Torsi pada J_2 hanya disebabkan oleh gerakan J_1. J_2 ditahan.
  (c) Diagram benda bebas terakhir untuk J_2.



(a) (b) (c)

Solusi Contoh 5 (lanj.)

Menjumlahkan torsi

$$
\begin{aligned}
(J_1 s^2 + D_1 s + K)\theta_1(s) - K\theta_2(s) &= T(s) \\
-K\theta_1(s) + (J_2 s^2 + D_2 s + K)\theta_2(s) &= 0
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Fungsi transfer:

$$\frac{\theta_2(s)}{T(s)} = \frac{K}{\Delta}$$

dimana

$$\Delta = \begin{vmatrix} (J_1 s^2 + D_1 s + K) & -K \\ -K & (J_2 s^2 + D_2 s + K) \end{vmatrix}$$

Solusi Contoh 5 (lanj.)

Persamaan (5) juga dapat diturunkan secara langsung dengan pemeriksaan melalui impedansi $Z_M(s)$:

$$\begin{bmatrix} \text{sum of} \\ \text{impedances} \\ \text{connected} \\ \text{to the motion} \\ \text{at } \theta_1 \end{bmatrix} \theta_1(s) - \begin{bmatrix} \text{sum of} \\ \text{impedances} \\ \text{between} \\ \theta_1 \text{ and } \theta_2 \end{bmatrix} \theta_2(s) = \begin{bmatrix} \text{sum of} \\ \text{applied} \\ \text{torques} \\ \text{at } \theta_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \text{sum of} \\ \text{impedances} \\ \text{between} \\ \theta_1 \text{ and } \theta_2 \end{bmatrix} \theta_1(s) + \begin{bmatrix} \text{sum of} \\ \text{impedances} \\ \text{connected} \\ \text{to the motion} \\ \text{at } \theta_2 \end{bmatrix} \theta_2(s) = \begin{bmatrix} \text{sum of} \\ \text{applied} \\ \text{torques} \\ \text{at } \theta_2 \end{bmatrix}$$

Ketaklinieran

- Model-model yang ada sejauh ini dikembangkan dari sistem-sistem yang kira-kira dapat dijelaskan oleh persamaan diferensial linier dan invarian waktu.
- Asumsi linearitas tersirat dalam pengembangan model ini. Di bagian ini, kami secara formal mendefinisikan istilah linier dan nonlinier dan tunjukkan cara membedakan keduanya.
- kita akan menunjukkan cara memperkirakan sistem nonlinier sebagai sistem linier sehingga kita dapat menggunakan teknik pemodelan sebelumnya.
- Sistem linier memiliki dua sifat: aditif (*additivity*) dan homogenitas (*homogeneity*).

Linierisasi

- Sistem kelistrikan dan mekanik yang dibahas sejauh ini diasumsikan linier.
- Namun, jika ada komponen nonlinier, kita harus linierkan sistemnya sebelum kita dapat menemukan fungsi transfernya.
- Kita mendefinisikan dan mendiskusikan nonlinier dan menunjukkan cara memperoleh perkiraan linier terhadap sistem nonlinier untuk memperolehnya fungsi transfer.

Linierisasi

- Langkah pertama adalah mengenali komponen nonlinier dan menuliskan persamaan diferensial nonliniernya.
  - Ketika kita melakukan linierisasi persamaan diferensial nonlinier, kita melakukan linierisasi persamaan tersebut untuk masukan sinyal kecil di sekitar solusi keadaan tunak ketika masukan sinyal kecil sama dengan nol.
  - Solusi keadaan tunak ini disebut kesetimbangan dan dipilih sebagai langkah kedua dalam proses linierisasi.
- Selanjutnya kita linierkan persamaan diferensial nonlinier, lalu kita ambil transformasi Laplace dari persamaan diferensial linier tersebut, dengan asumsi kondisi awal nol.
- Terakhir, kita memisahkan variabel masukan dan keluaran dan membentuk fungsi transfer.

Linierisasi

Fungsi $f(x)$ dapat diekspansikan kedalam deret Taylor sebagai berikut

$$f(x) = f(x_0) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0} \frac{(x-x_0)}{1!} + \left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_{x=x_0} \frac{(x-x_0)^2}{2!} + \cdots \tag{6}$$

Untuk perubahan kecil x di x_0, kita dapat mengabaikan suku tingkat tinggi. Perkiraan yang dihasilkan menghasilkan hubungan garis lurus antara perubahan $f(x)$ dan perubahan kecil di x_0. Mengabaikan suku tingkat tinggi, maka

$$f(x) - f(x_0) \approx \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0} (x-x_0) \tag{7}$$

atau

$$\delta f(x) \approx m|_{x=x_0} \delta x$$

Linierisasi

Contoh 6: Linierkan Persamaan (8) untuk perubahan kecil di sekitar $x = \frac{\pi}{4}$.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + \cos x = 0 \tag{8}$$

Solusi: Karena kita ingin melinierkan persamaan di sekitar $x = \pi/4$, kita misalkan $x = \delta x + \pi/4$, di mana δx adalah perubahan kecil di sekitar $\pi/4$, dan substitusikan x ke dalam Persamaan (8):

$$\frac{d^2\left(\delta x + \frac{\pi}{4}\right)}{dt^2} + 2\frac{d\left(\delta x + \frac{\pi}{4}\right)}{dt} + \cos\left(\delta x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \tag{9}$$

tetapi,

$$\frac{d^2\left(\delta x + \frac{\pi}{4}\right)}{dt^2} = \frac{d^2\delta x}{dt^2} \quad \text{dan} \quad \frac{d\left(\delta x + \frac{\pi}{4}\right)}{dt} = \frac{d\delta x}{dt} \tag{10}$$

Solusi Contoh 6 (lanj.)

Substitusi $f(x) = \cos\left(\delta x + \frac{\pi}{4}\right)$, $f(x_0) = \cos\frac{\pi}{4}$, dan $(x - x_0) = \delta x$ ke Pers. (7) menghasilkan

$$\cos\left(\delta x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left.\frac{d\cos x}{dx}\right|_{x=\frac{\pi}{4}} \delta x = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\delta x \qquad (11)$$

Penyelesaian Pers. (11), kita dapatkan

$$\cos\left(\delta x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\delta x = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\delta x$$

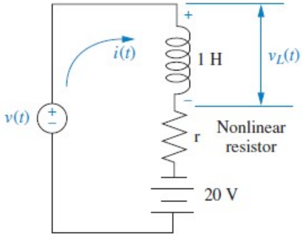
Substitusi Pers. (10) dan (11) ke Pers. (9) menghasilkan persamaan diferensial linier berikut:

$$\frac{d^2\delta x}{dt^2} + 2\frac{d\delta x}{dt} - \frac{\sqrt{2}}{2}\delta x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad (12)$$

Pers. (12) dapat diselesaikan untuk δx, sehingga dapat diperoleh $x = \delta x + \pi/4$.

Fungsi transfer jaringan listrik nonlinier

Contoh 7: Tentukan fungsi transfer, $V_L(s)/V(s)$, untuk jaringan listrik ditunjukkan pada Gambar 6, yang berisi resistor nonlinier yang hubungan tegangan-arusnya ditentukan oleh $i_r = 2e^{0.1v_r}$, di mana i_r dan v_r adalah arus resistor dan tegangan, masing-masing. Juga, $v(t)$ pada Gambar 6 adalah sumber sinyal kecil.



Gambar 6: Jaringan listrik nonlinier

Solusi: Gunakan log natural dari hubungan arus-tegangan resistor, kita dapatkan $v_r = 10 \ln \frac{1}{2} i_r$.

Solusi Contoh 7 (lanj.)

Menerapkan hukum tegangan Kirchhoff pada loop, dimana $i_r = i$, maka

$$L\frac{di}{dt} + 10\ln\frac{1}{2}i - 20 = v(t) \tag{13}$$

Dengan $v(t) = 0$, rangkaian terdiri dari baterai 20 V yang dirangkai seri dengan induktor dan resistor nonlinier. Dalam keadaan stabil, tegangan melintasi induktor akan menjadi nol, karena $v_L = L\frac{di}{dt}$ dan $\frac{di}{dt}$ adalah nol dalam kondisi tunak, mengingat sumber baterai konstan. Karena, tegangan resistor, $v_r = 20$ V, resistor, $i_r = 2e^{0.1(20)}$, maka kita dapatkan $i_r = i = 14.78$ amps. Arus ini, i_0, adalah titik setimbang dari jaringan listrik. Oleh karena itu, $i = i_0 + \delta i$. Substitusi i ke Persamaan (13), diperoleh

$$L\frac{d(i_0 + \delta i)}{dt} + 10\ln\frac{1}{2}(i_0 + \delta i) - 20 = v(t) \tag{14}$$

Solusi Contoh 7 (lanj.)

Gunakan (7) untuk melinierkan $\ln \frac{1}{2}(i_0 + \delta i)$, sehingga

$$\ln \frac{1}{2}(i_0 + \delta i) - \ln \frac{1}{2} i_0 = \left. \frac{d\left(\ln \frac{1}{2} i\right)}{di} \right|_{i=i_0} \delta i = \left. \frac{1}{i} \right|_{i=i_0} \delta i = \frac{1}{i_0} \delta i$$

atau

$$\ln \frac{1}{2}(i_0 + \delta i) = \ln \frac{i_0}{2} + \frac{1}{i_0} \delta i$$

Substitusi ke Pers. (14), persamaan yang dilinierisasi menjadi

$$L \frac{di}{dt} + 10 \left(\ln \frac{i_0}{2} + \frac{1}{i_0} \delta i \right) - 20 = v(t)$$

Diberikan $L = 1$ dan $i_0 = 14.78$, pers. diferensial yang dilinierisasi adalah

$$\frac{di}{dt} + 0.677 \delta i = v(t)$$

Solusi Contoh 7 (lanj.)

Dengan transformasi Laplace dan penyelesaian untuk δi, diperoleh

$$\delta i(s) = \frac{V(s)}{s + 0.677} \tag{15}$$

Tetapi tegangan yang melewati induktor di sekitar titik setimbang adalah

$$v_L(t) = L\frac{d}{dt}(i_0 + \delta i) = L\frac{d\delta i}{dt}$$

Dengan transformasi Laplace, maka

$$V_L(s) = Ls\delta i(s) = s\delta i(s) \tag{16}$$

Substitusi Pers. (15) ke Pers. (16) menghasilkan

$$V_L(s) = s\frac{V(s)}{s + 0.677} \;\rightarrow\; \frac{V_L(s)}{V(s)} = \frac{s}{s + 0.677}$$

untuk perubahan kecil di sekitar $i = 14.78$ atau $v(t) = 0$.


YOU CAN
IF
YOU THINK YOU CAN
NEVER
GIVE UP!