Transformasi Laplace

Heri Purnawan

Disampaikan pada matakuliah **Dasar Sistem Kontrol**
Program Studi S-1 Teknik Elektro
Fakultas Sains dan Teknologi (FST)
Universitas Islam Lamongan (UNISLA)

November 19, 2024

Email: heripurnawan@unisla.ac.id

Review Transformasi Laplace

- Sistem yang diwakili oleh persamaan diferensial sulit untuk dimodelkan sebagai diagram blok, sehingga transformasi Laplace dapat mewakili input, output, dan sistem sebagai entitas terpisah.

Definisi Transformasi Laplace

$$\mathcal{L}\left[f(t)\right] = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\, dt \tag{1}$$

- Invers transformasi Laplace adalah proses yang digunakan untuk mengubah fungsi di domain frekuensi (fungsi Laplace) kembali ke domain waktu.

Invers Transformasi Laplace

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right] \tag{2}$$

Invers Transformasi Laplace

- Secara formal, invers transformasi Laplace diberikan oleh integral kontur kompleks yang dikenal sebagai **integral Bromwich**:

Invers transformasi Laplace

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma - j\infty}^{\gamma + j\infty} F(s) e^{st} \, ds \tag{3}$$

- γ adalah garis vertikal dalam bidang kompleks, yang terletak di sebelah kanan semua poles dari $F(s)$
- j adalah bilangan imajiner murni

- Namun, dalam praktiknya, invers transformasi Laplace sering kali dilakukan dengan menggunakan tabel transformasi Laplace.

Contoh transformasi Laplace

Contoh 1: Tentukan $F(s)$ dengan definisi transformasi Laplace pada Pers. (1), jika $f(t) = 1$.

Jawab: berdasarkan definisi transformasi Laplace,

$$
\begin{aligned}
F(s) = \mathcal{L}\left(f(t)\right) &= \int_0^\infty e^{-st}\, dt \\
&= \lim_{a\to\infty} \int_0^a e^{-st}\, dt \\
&= -\frac{1}{s} \lim_{a\to\infty} \left[e^{-st}\right]_0^a \\
&= -\frac{1}{s} \lim_{a\to\infty} \left(e^{-sa} - 1\right) = -\frac{1}{s}\left(0-1\right) = \frac{1}{s}
\end{aligned}
$$

Contoh 2: (Tugas untuk anda) tentukan $F(s)$ dengan definisi transformasi Laplace pada Pers. (1), jika

1. $f(t) = t$
2. $f(t) = e^{-at}$

Tabel Transformasi Laplace

Tabel 1 Transformasi Laplace

Item no.	$f(t)$	$F(s)$
1.	$\delta(t)$	1
2.	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
3.	$tu(t)$	$\frac{1}{s^2}$
4.	$t^n u(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
5.	$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$
6.	$\sin \omega t u(t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
7.	$\cos \omega t u(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$

Teorema Dalam Transformasi Laplace

Beberapa teorema dalam transformasi Laplace

- Sifat kelinieran

$$\mathcal{L}[kf(t)] = kF(s) \tag{4}$$

$$\mathcal{L}[f_1(t) + f_2(t)] = F_1(s) + F_2(s) \tag{5}$$

Bukti:

- Pembuktian untuk Pers. (4)

$$\mathcal{L}[kf(t)] = \int_0^\infty kf(t)e^{-st}\ dt = k\int_0^\infty f(t)e^{-st}\ dt = kF(s)$$

- Pembuktian untuk Pers. (5)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f_1(t) + f_2(t)] &= \int_0^\infty (f_1(t) + f_2(t))e^{-st}\ dt \\ &= \int_0^\infty f_1(t)e^{-st} + f_2(t)e^{-st}\ dt \\ &= \int_0^\infty f_1(t)e^{-st}\ dt + \int_0^\infty f_2(t)e^{-st}\ dt = F_1(s) + F_2(s)\end{aligned}$$

Teorema Dalam Transformasi Laplace (lanj.)

- Sifat pergeseran frekuensi (Buktikan!)

$$\mathcal{L}[e^{-at}f(t)] = F(s+a) \tag{6}$$

- Sifat pergeseran waktu (Buktikan!)

$$\mathcal{L}[f(t-T)] = e^{-sT}F(s) \tag{7}$$

- Penskalaan (Buktikan!)

$$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right) \tag{8}$$

- Teorema diferensiasi (Buktikan!)

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n f}{dt^n}\right] = s^n F(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} f^{k-1}(0) \tag{9}$$

- Teorema integrasi (Buktikan!)

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)\ d\tau\right] = \frac{F(s)}{s} \tag{10}$$

Pecahan Parsial dalam Bentuk Laplace

- Penguraian Pecahan Parsial
  - Untuk menemukan invers transformasi Laplace dari fungsi yang rumit.
  - Mengubah fungsi tersebut menjadi penjumlahan dari beberapa suku yang lebih sederhana.
  - Setiap suku memiliki transformasi Laplace yang telah diketahui.
- Jika $F_1(s) = N(s)/D(s)$, di mana derajat $N(s)$ kurang dari derajat $D(s)$, maka penguraian pecahan parsial dapat dibuat. Jika derajat $N(s)$ lebih besar dari atau sama dengan derajat $D(s)$, maka $N(s)$ harus dibagi dengan $D(s)$ secara berturut-turut sampai memiliki sisa yang derajat pembilangnya kurang dari penyebutnya.
- Contoh:

$$F(s) = \frac{s^3 + 2s^2 + 6s + 7}{s^2 + s + 5} \rightarrow F(s) = s + 1 + \frac{2}{s^2 + s + 5}$$

Bentuk Pecahan Parsial

- Terdapat tiga kasus bagaimana F bisa diperluas menjadi pecahan parsial.
  - Kasus 1: Akar penyebut $F(s)$ real dan berbeda
    Contoh:

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)} \rightarrow \frac{2}{(s+1)(s+2)} = \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{s+2}$$

diperoleh: $K_1 = 2$ dan $K_2 = -2$, maka

$$F(s) = \frac{2}{s+1} - \frac{2}{s+2} \rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s+1} - \frac{2}{s+2}\right]$$

Berdasarkan Tabel 1, maka

$$f(t) = 2e^{-t} - 2e^{-2t}$$

Bentuk Pecahan Parsial (lanjutan)

- Terdapat tiga kasus bagaimana F bisa diperluas menjadi pecahan parsial.
  - Kasus 2: Akar penyebut $F(s)$ real dan kembar

    Contoh:

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)^2}$$

maka

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)^2} = \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{(s+2)^2} + \frac{K_3}{s+2}$$

diperoleh: $K_1 = 2, K_2 = -2$, dan $K_3 = -2$, sehingga

$$F(s) = \frac{2}{s+1} - \frac{2}{(s+2)^2} - \frac{2}{s+2}$$

Berdasarkan Tabel 1, maka

$$f(t) = 2e^{-t} - 2te^{-2t} - 2e^{-2t}$$

Bentuk Pecahan Parsial (lanjutan)

- Terdapat tiga kasus bagaimana F bisa diperluas menjadi pecahan parsial.
    - Kasus 3: Akar penyebut $F(s)$ imajiner
      Contoh:

$$F(s) = \frac{3}{s(s^2+2s+5)} \rightarrow \frac{3}{s(s^2+2s+5)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2 s + K_3}{s^2+2s+5}$$

diperoleh: $K_1 = \frac{3}{5}, K_2 = -\frac{3}{5}$, dan $K_3 = -\frac{6}{5}$ maka

$$F(s) = \frac{3/5}{s} - \frac{3}{5}\frac{s+2}{s^2+2s+5}$$

Berdasarkan Tabel 1 and Tabel 2.2 (lihat penjelasan[1]), maka

$$f(t) = \frac{3}{5} - \frac{3}{5}e^{-t}\left(\cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)$$

[1] Norman S. Nise, "Control System Engineering"

Contoh transformasi Laplace dari Persamaan Diferensial

Contoh 3: Diketahui persamaan diferensial berikut, selesaikan $y(t)$ jika semua kondisi awal adalah nol. Gunakan transformasi Laplace.

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 12\frac{dy(t)}{dt} + 32y(t) = 32u(t) \tag{11}$$

Jawab: Gunakan no. 2 pada Tabel 1 dan teorema diferensiasi pada Pers. (9), maka transformasi Laplace dari Pers. (11) adalah

$$s^2Y(s) + 12sY(s) + 32Y(s) = \frac{32}{s} \tag{12}$$

Penyelesaian $Y(s)$ menghasilkan

$$Y(s) = \frac{32}{s(s^2 + 12s + 32)} = \frac{32}{s(s+4)(s+8)}$$

Lanjutan solusi Contoh 3

Mengacu pada Kasus 1, maka

$$Y(s) = \frac{32}{s(s+4)(s+8)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+4} + \frac{K_3}{s+8} \tag{13}$$

Diperoleh nilai $K_1 = 1$, $K_2 = -2$, dan $K_3 = 1$, sehingga

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{2}{s+4} + \frac{1}{s+8}$$

Dengan invers transformasi Laplace, maka diperoleh

$$y(t) = (1 - 2e^{-4t} + e^{-8t})u(t)$$

Latihan transformasi Laplace

Latihan 1:
Tentukan transformasi Laplace dari $f(t) = te^{-5t}$.

Jawab: $F(s) = 1/(s+5)^2$

Latihan 2:
Tentukan invers transformasi Laplace dari

$$F(s) = \frac{10}{s(s+2)(s+3)^2}$$

Jawab:

$$f(t) = \frac{5}{9} - 5e^{-2t} + \frac{10}{3}te^{-3t} + \frac{40}{9}e^{-3t}$$